UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2012/13

Blatt 10 Abgabetermin: bis Donnerstag, 17.01.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (2+3=5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmässige Konvergenz. Geben Sie jeweils den Grenzwert der Folge an, sofern dieser existiert.

(i) $\{f_n\}$ mit $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\{g_n\}$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^{2n}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (2+(2+2)=6 Punkte)

Gegeben Sei die Funktionenfolge $\{f_n\}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx(x+1)}{1+n^2x^2} \sin(2\pi n^2 x) + \frac{e^x + nx}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie die punktweise Konvergenz der Folge und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Auf welchen der Intervalle $[a, b]$ und $[a, \infty)$ konvergiert die Folge gleichmäßig? Begründen Sie Ihre Antwort.
(*Hinweis: Ist* $x \in \mathbb{N}$, *so ist* $\sin(2\pi n^2 x) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 3 (3×1,5=4,5 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Folgenden Potenzreihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-1)^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$.

(*Hinweis: Benutzen Sie die Formel von Cauchy-Hadamard.*)

(bitte wenden)

Sei $\{x_n\}$ eine reelle Zahlenfolge. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, falls zu jedem $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n > M$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 4 **(1+0,5+1+1+1=4,5 Punkte)**

Sei $\{x_n\}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\exp(x_n) \geq \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}$.

(c) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x_n)}{x_n^k} = \infty$.

(d) Es ist $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$.

(e) Für alle $\alpha > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

Aufgabe 5* **(3 Bonuspunkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$P_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k;\ a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k \in \{0, \ldots, n\} \right\}$$

aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ein Vektorraum ist, wenn man ihn mit den punktweisen Operationen der Addition

$$+ : P_n \times P_n \to P_n, \quad (p, q) \mapsto p + q,$$

mit $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und der Multiplikation mit Skalaren

$$\cdot : \mathbb{R} \times P_n \to P_n, \quad (\lambda, p) \mapsto \lambda \cdot p,$$

mit $(\lambda \cdot p)(x) = \lambda \cdot p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, versieht.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI1_12_13/Ueb/uebhmi1