UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2012/13

Blatt 11 Abgabetermin: bis Donnerstag, 24.01.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1+1+2=4 Punkte)

Untersuchen Sie für die folgenden Teilmengen, ob es sich um einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ handelt:

(i) $U_1 = \{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3;\ x_1 - 2x_2 = 0\}$,

(ii) $U_2 = \{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 0\}$,

(iii) $U_3 = M^\perp$, wobei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine beliebige Teilmenge sei.

Aufgabe 2 (1+1+1=3 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Sind die Vektoren $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(ii) Sind die Vektoren $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$, $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(3)}$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(iii) Kann der Vektor $\underline{\boldsymbol{e}}^{(1)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ dargestellt werden?

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ und sind $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\boldsymbol{v}}^{(k)} \in V$ linear abhängige Vektoren, so sind für jeden Vektor $\underline{\boldsymbol{x}} \in V$ auch die Vektoren $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\boldsymbol{v}}^{(k)}, \underline{\boldsymbol{x}}$ linear abhängig.

(b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und sind $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\boldsymbol{v}}^{(k)} \in V$ linear unabhängige Vektoren, so sind für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ auch die Vektoren $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\boldsymbol{v}}^{(j-1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(j+1)}, \dots, \underline{\boldsymbol{v}}^{(k)} \in V$ linear unabhängig.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(2+2,5=4,5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Finden Sie anschließend zu einem beliebigen Vektor

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\boldsymbol{x}} = \lambda_1 \underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Vektorraums

$$V = \operatorname{Spann}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 5 **(3+1,5=4,5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \underline{\boldsymbol{x}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und

$$\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \underline{\boldsymbol{x}} \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

jeweils eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

(b) Skizzieren Sie für die Normen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ und $\| \cdot \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ jeweils die Menge aller Punkte mit Norm 1.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI1_12_13/Ueb/uebhmi1