UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2012/13

Blatt 12 Abgabetermin: bis Donnerstag, 31.01.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (3×1,5=4,5 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension von Spann$(\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{u}}^{(2)})$, Spann$(\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{u}}^{(3)})$, und im Falle $a = 2$ von Spann$(\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{u}}^{(2)}, \underline{\boldsymbol{u}}^{(3)})$.

Aufgabe 2 (2,5+1=3,5 Punkte)

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Vektor

$$\underline{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den Unterraum $V = \{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^4;\ \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{N}} \rangle = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$.

1. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.
2. Bestimmen Sie $V^\perp$.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Seien

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $M = \{\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}\}^\perp$ eine Gerade ist, und geben Sie eine Parameterdarstellung von M an.

(b) Sei $\underline{\boldsymbol{x}} \in M$ mit $\|\underline{\boldsymbol{x}}\| = 1$. Berechnen Sie das (orientierte) Volumen des von $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ aufgespannten Spates.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(2+2+1=5 Punkte)**

Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b_t}} = \begin{pmatrix} 5-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_t an, die die Punkte $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b_t}}, \underline{\boldsymbol{c}}$ enthält.

(b) Bestimmen Sie $G = E_0 \cap E_1$. Gilt $G \subset E_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$?

(c) Berechnen Sie den Abstand der Ebene E_t zum Ursprung. Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, das diesen Abstand maximiert?

Aufgabe 5 **(3×1=3 Punkte)**

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Mengen. Zeigen Sie:

(a) Sind U und V beschränkt, so auch $U \cup V$.

(b) Sind U und V offen, so auch $U \cap V$.

(c) Sind U und V abgeschlossen, so auch $U \cup V$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI1_12_13/Ueb/uebhmi1