Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Höhere Mathematik für Ingenieure II, Blatt 5

Aufgabe 1. (1+2+2 Punkte)

i) Ergänzen Sie die Vektoren

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer posiitiv orientierten Basis des $\mathbb{R}^3$.

ii) Zeigen Sie (durch elementare Rechnung) den Entwicklungssatz

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} \,.$$

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien $\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\mathbf{c}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ und $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ seien nicht parallel. Für welche Vektoren $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}} \,?$$

Aufgabe 2. (3+2 Punkte)

i) Gegeben seien die Punkte

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene. Fertigen Sie eine Skizze an.

ii) Im $\mathbb{R}^2$ sein eine Gerade in Hessescher Normalform gegeben durch

$$\langle \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \,, \quad \underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Stellen Sie die Gerade in der Form $x_2 = f(x_1) = ax_1 + b$ dar und skizzieren Sie die Gerade inkl. der Normalen.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (2+3 Punkte) Es sei L eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$.

i) Ist es möglich, dass zwei linear abhängige Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ auf zwei linear unabhängige Vektoren $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet werden?

ii) Ist es möglich, dass zwei linear unabhängige Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ auf zwei linear abhängige Vektoren $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet werden? Wenn ja, kann man daraus eine Aussage über kern L ableiten?

Aufgabe 4. (1+2+2 Punkte)

i) Geben Sie eine nicht-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

ii) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ eine Rotation um 45° um die x_2-Achse. Geben Sie Abbildung in Matrixschreibweise an.

iii) Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist diese eindeutig bestimmt?

Abgabe: Bis Mittwoch, 18.05.2011, 14.00 Uhr, Briefkästen (direkt vor dem Geschäftszimmer), Geb. E2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI2_11/hmi2.html