Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Höhere Mathematik für Ingenieure II, Blatt 6

Aufgabe 1. (5 Punkte) Zeigen Sie: Für eine lineare Abbildung $L\colon V \to W$ von endlichdimensionalen Vektorräumen mit $\dim V = \dim W$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) L ist injektiv.

ii) L ist surjektiv.

iii) L ist bijektiv.

Aufgabe 2. (1+4 Punkte) Es sei $a = 0$, $a = 1$ oder $a = 2$ fixiert und $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ sei gegeben durch

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ x_1^a \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix} .$$

i) Ist L eine lineare Abbildung?

ii) Nun sei $a = 1$: Durch welche Matrix wird L bzgl. der kanonischen Basen dargestellt? Bestimmen Sie $\operatorname{kern} L$, $\operatorname{rg} L$ und $\operatorname{bild} L$.

Aufgabe 3. (2+3 Punkte) Es bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} ;$$
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} .$$

Es sei $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $L(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $L\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{w}}^{(2)} - \underline{\mathbf{w}}^{(1)}$.

i) Bestimmen Sie Rang, Bild und Kern der Abbildung.

ii) Bestimmen Sie $A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ und $A^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (3+1+1 Punkte)

i) Es bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Es sei weiter $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ und $L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(2)} - \underline{\mathbf{e}}^{(1)}$. Bezüglich welcher Basis $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ hat L die Matixdarstellung

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

ii) Ist die Matrix $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}$ invertierbar?

iii) Finden Sie jeweils eine lineare bijektive und eine nicht-lineare surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 25.05.2011, 14.00 Uhr, Briefkästen (direkt vor dem Geschäftszimmer), Geb. E2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI2_11/hmi2.html