Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Höhere Mathematik für Ingenieure II, Blatt 7

Aufgabe 1. (1+3+3 Punkte) Man betrachte die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}\ , \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}\ , \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(3)}) = -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}\ .$$

Dabei bezeichne $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$.

i) Bestimmmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der kanonischen Basen.

ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der Basen $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ und $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)}\ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(3)}\ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = 5\underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)}\ ;$$
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \underline{\mathbf{f}}^{(2)}\ , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + 4\underline{\mathbf{f}}^{(2)}\ .$$

iii) Finden Sie eine Basis $(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrixdarstellung von L bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ und bzgl. $(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 2. (3 Punkte) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ die kanonische Basiss $\mathcal{E}$ sowie die Basis $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$, wobei

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}\ , \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = 2\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$$

gelte. Bzgl. der Standardbasis seien der Vektor $\underline{\mathbf{x}}$ bzw. die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \text{bzw.} \quad (1\ 2)^{\mathcal{E}}\ .$$

Bestimmen Sie die Darstellung von $\underline{\mathbf{x}}$ bzw. L bzgl. $\mathcal{F}$.

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Zeigen Sie mithilfe der Definition von Stetigkeit, dass f stetig ist.

Bitte wenden.

ii) Es seien f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} , \qquad g(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Sind die Funktionen im Punkt $x = 0$ stetig?

Aufgabe 4. (2.5+2.5 Punkte)

i) Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 2$ und die Funktion f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{|x_1|^k + x_2^2}{x_1^2 + |x_2|^k} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} , \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig sein kann. (Hinweis: Geeignete Nullfolge suchen.)

ii) Es sei $k = 3$ oder $k = 4$. Die Funktion f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_2^k}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} , \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} . \end{cases}$$

Ist f stetig im Punkt $\underline{\mathbf{0}}$?

Abgabe: Bis Mittwoch, 01.06.2011, 14.00 Uhr, Briefkästen (direkt vor dem Geschäftszimmer), Geb. E2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI2_11/hmi2.html