Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Höhere Mathematik für Ingenieure II, Blatt 8

Aufgabe 1. (2+1+2 Punkte) Es sei f eine Funktion $I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein (verallgemeinertes) Intervall bezeichne.

Dann lassen sich auch die **einseitigen Grenzwerte** definieren:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \{x_n\},\ \ x_n \in I,\ \ x_n < x_0 \ \text{ gilt:}\\ &\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \ ;\\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \{x_n\},\ \ x_n \in I,\ \ x_n > x_0 \ \text{ gilt:}\\ &\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \ .\end{aligned}$$

Weierhin definiere man für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ (anlog der Fall “$-\infty$”):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty :\Leftrightarrow \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M < x_n \text{ für alle } n > N,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow \text{für alle } \{x_n\},\ \ x_n \in I,\ \ \text{gilt: } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \ .$$

Existieren die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{x^2+1}{x^3}\ ,\quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{x^2+1}{x^3}\ ,\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\ ,$$
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{x}{|x|}\ ,\quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{x}{|x|}\ ,$$
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{x\sin(x)}{|x|}\ ,\quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{x\sin(x)}{|x|}\ ,\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x\sin(x)}{|x|}\ ?$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es seien f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und $f \circ g$ stetig sind.

Aufgabe 3. (5 Punkte) Es sei f: $[0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$ – ein solches ξ nennt man Fixpunkt von f.

(Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für die Funktion $g(x) = f(x) - x$.)

Zeigen Sie weiter, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in [0,1]$ hat.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (2+3 Punkte)

i) Skizzieren Sie die Funktion (die Kurve) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für } \ t \in \mathbb{R}\ .$$

Stellen Sie in der Skizze auch einen "Geschwindigkeitsvektor" an die Kurve dar.

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert. Der **zentrale Differenzenquotient** ist definiert als

$$\delta(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\ .$$

Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient eine gerade Funktion in h ist (vgl. Kap. 3.1 der Vorlesung) und dass im Falle der Differenzierbarkeit von f gilt $\lim_{h\to 0} \delta(h) = f'(x_0)$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 08.06.2011, 14.00 Uhr, Briefkästen (direkt vor dem Geschäftszimmer), Geb. E2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI2_11/hmi2.html