Lösungsskizze Blatt 8 HMI 2

Aufgabe 1

Für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, da $f(x)$ in x_0 stetig ist als Verkettung stetiger Funktionen (f steht hierbei für die Funktionen in i), ii) und iii)). Wir betrachten im Folgenden $x_0 = 0$ bzw. den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$:

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1} = 0$, „ $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x^3} = -\infty$"(Es bleibt zu erwähnen, dass beide Grenzwerte nicht definiert sind).

ii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$, analog folgt: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$.

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \sin(x)$ und dieser Grenzwert existiert nicht. Weiter gilt: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin(x)}{|x|} = 0$.

Aufgabe 2

i) f ist genau dann stetig in x_0, wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ aus $|x - x_0| < \delta_1$ gerade $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ folgt. Die Stetigkeit von g kann analog zu der von f beschrieben werden, allerdings mit δ_2 anstatt δ_2. Es folgt demnach: $|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ mit $|x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Natürlich ist es auch möglich diesen Aufgabenteil mit dem Folgenkriterium für Stetigkeit und anschließender Anwendung der Grenzwertsätze zu beweisen.

ii) Da f stetig in x_0 ist, gilt nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit gerade $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$, wobei $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Die gleiche Eigenschaft besitzt die stetige Funktion g, so dass nach den Grenzwertsätzen gerade die Behauptung folgt.

iii) Es gelten: $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ für $n \to \infty$, da g stetig ist. f ist in $g(x_0)$ stetig. Es folgt: $f \circ g(x_n) = f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$ für $n \to \infty$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 3

Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig und g ist stetig als Summe stetiger Funktionen. Ferner gilt: $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (Wären $g(0) = 0$ bzw. $g(1) = 0$, so hätten wir einen Fixpunkt gefunden). Es existiert also ein

Vorzeichenwechsel und damit nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0,1]$, so dass $g(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \xi$. Weiter sei nun $g(x) := \exp(x) - 3x = 0$ und $x \in [0,1]$. Es gilt: $g(0) = 1 > 0$ und $g(1) = e - 3 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also mindestens ein $\xi \in [0,1]$ mit $\exp(x) = 3x$. Eine andere Möglichkeit wäre, die Funktion $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{3}$ zu betrachten mit $f : [0,1] \to [0,1]$. Da f stetig ist und das Intervall [0,1] auf sich selbst abbildet folgt mit dem ersten Teil dieser Aufgabe direkt die Behauptung unter Anwenden des Zwischenwertsatzes.

Aufgabe 4

i) Hierbei handelt es sich um eine Schraubenlinie (Helix) der Ganghöhe 1 und mit Radius 1.

ii) Es gilt $\delta(-h) = \delta(h)$, welches man leicht nachrechnet. Es handelt sich also um eine gerade Funktion. Weiter ergibt sich mit der Voraussetzung, dass f in x_0 differenzierbar ist:
$$\delta(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+(-h)) - f(x_0)}{(-h)}\right) \to f'(x_0) \text{ für } h \to 0.$$