Lösungsskizze zu Blatt 1, HMI 2

Aufgabe 1

i) Nach der Dimensionsformel ist dim Bild(A) = 1. Den gewünschten Anforderungen genügt zum Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Es sind $B^T \in M(n_4, n_3)$ und $A^T \in M(n_2, n_1)$. Also ist das Matrizenprodukt $B^T C A^T$ definiert, falls $n_3 = n_5$ und $n_6 = n_2$ sind. Insgesamt gilt: $B^T C A^T \in M(n_4, n_1)$

iii) a) Für $b = 0$ existieren immer nichttriviale Lösungen (8.2.4 ii)) und rg$A$ =rg$(A|b)$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$

b) Im Allgemeinen kann man keine Lösung erwarten (mehr Gleichungen als Unbekannte). Eine Lösung existiert, falls rg(B)=rg$(B|b)$.

c) Mit rg$(C) = 2 < 3$ folgt, dass nicht für jede rechte Seite b eine Lösung existiert (8.2.4 ii)).

Aufgabe 2

Für $\alpha \neq \frac{3}{4}$ ist dim ker(A_α)=0 und mit der Dimensionsformel folgt direkt, dass rg$A_\alpha = 4$ Für $\alpha = \frac{3}{4}$ ist dim ker(A_α)=1 und somit rg$A_\alpha = 3$

Aufgabe 3

$Ax = 0$ ist genau für alle $x = t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ lösbar. Es folgt: rg$A = 2$. Nach 8.2.2 gilt, dass $Ax = b$ genau dann lösbar ist, wenn rg$A$ =rg$(A|b)$. Also ist für $b = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

i) Für $a = 6$ ist $Ax = b$ lösbar unter der Voraussetzung, dass $b = t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, da $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. Es ist jedoch nicht eindeutig lösbar. Für $a \neq 6$ ist $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar, da $\mathrm{rg}A = 2 = n$.

ii) Es muss gelten, dass $A \in M(3,2)$ und nach Aufstellen eines linearen Gleichungssystems erhält man die Lösung

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$