Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dipl. Math. Dominic Breit

Saarbrücken, 01.08.2009

Klausur zur Vorlesung HMI II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lineare Gleichungssyteme, lineare Abbildungen; **2+2+2+4 Punkte**)

i) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3,2)\ , \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,2)\ .$$

(a) Bestimmen Sie den Kern von A. Für welche $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ ist das lineare Gleichungssytem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ lösbar?

(b) Gibt es eine Matrix $B \in M(?,?)$ mit $AB = C$?

ii) Es bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}\ , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)}\ ;$$
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(2)}\ , \qquad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)}\ .$$

Es sei L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $L(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $L\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{w}}^{(2)} - \underline{\mathbf{w}}^{(1)}$.

(a) Bestimmen Sie Rang, Bild und Kern der Abbildung.

(b) Bestimmen Sie $A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ und $A^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$.

Erinnerung zur Notation: Ist L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+1.5+1.5+5 Punkte**)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_2^3}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}\,, \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \end{cases}$$

Ist f stetig im Punkt $\underline{\mathbf{0}}$?

ii) (a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{(x^2)}$, $a > 0$ fixiert.

(b) Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $f\colon f(x) = \ln(\ln(x))$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

iii) Es sei $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x^3(1 + x)|\ .$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-1, 1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Aufgabe 3. (Eindimensionale Integration; **1.5+2+2+3+1.5 Punkte**)

i) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x}\, \mathrm{d}x\ .$$

ii) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1 + x}{x^3 + 2x^2 + x}\, \mathrm{d}x\ ;$

(b) $\displaystyle\int x^2 \sinh(x)\, \mathrm{d}x\ ;$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x\ .$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3}\, \mathrm{d}x\ ?$$

Aufgabe 4. (Numerische Methoden; **2+3+1+1+1+2 Punkte**)

i) Es sei $f(x) = \sin(x + \pi)$, $n = 1$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$. Berechnen Sie einen Näherungswert für $f'(0)$

(a) mittels des Differenzenquotienten;

(b) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

ii) Bestimmen Sie eine Approximation (8 Nachkommastellen) von

$$\int_0^1 x \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

(a) mit der Simpson-Regel;

(b) mit der summierten Trapez-Regel zu $N = 4$.

iii) Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\underline{\mathbf{x}} \mapsto \frac{(x_1 - x_2)}{x_1} \; .$$

Betrachten Sie die numerische Aufgabe der Berechnung von $y = f(\underline{\mathbf{x}})$.

(a) Ist die Aufgabe stets gut konditioniert?

(b) Betrachten Sie den Algorithmus

$$u = x_1 \ominus x_2 \; , \qquad \tilde{y} = u \oslash x_1 \; .$$

Ist der Algorithmus gutartig?