**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
**Universität des Saarlandes**
**P.D. Dr. Michael Bildhauer**
**Dipl. Math. Dominic Breit**

Saarbrücken, 05.10.2009

## Klausur zur Vorlesung HMI II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

**Aufgabe 1.** (Matrizen, lineare Gleichungssyteme, lineare Abbildungen; **2+2+3+1+2 Punkte**)

*i)* Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M(3,2)\ , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,2)\ .$$

(a) Bestimmen Sie den Kern von $A$. Für welche $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ ist das lineare Gleichungssytem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ lösbar?

(b) Gibt es eine Matrix $B \in M(?,?)$ mit $AB = C$?

*ii)* Es bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Es sei weiter $L$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ und $L\underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(2)} - \underline{\mathbf{e}}^{(1)}$. Bezüglich welcher Basis $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ hat $L$ die Matixdarstellung

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ?$$

*iii)* Ist die Matrix $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}$ invertierbar?

*iv)* Finden Sie jeweils eine lineare bijektive und eine nicht-lineare surjektive Abbildung $f$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Erinnerung zur Notation: Ist $L$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 2.** (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+1.5+1.5+5 Punkte**)

*i)* Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2^3}{x_1 + \|\underline{\mathbf{x}}\|^3} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}\ , \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\ . \end{cases}$$

Ist $f$ stetig im Punkt $\underline{\mathbf{0}}$?

*ii)* Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

(b) $f(x) = 2^{(\ln(x))}$.

*iii)* Es sei $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2 |x + x^2|\ .$$

Ist $f$ stetig auf $I$? Ist $f$ differenzierbar auf $(-1, 1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von $f$ auf $I$.

**Aufgabe 3.** (Eindimensionale Integration; **je 2 Punkte**)

*i)* Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

*ii)* Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{1-x}{x^3 + 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\ .$$

*iii)* Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x\ ?$$

**Aufgabe 4.** (Satz von Taylor, numerische Methoden; **3+1+1+3+2 Punkte**)

*i)* Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritter Ordnung zum Entwicklungspunkt 0 der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

*ii)* Bestimmen Sie eine Approximation (8 Nachkommastellen) von

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) mit der Simpson-Regel;

(b) mit der summierten Trapez-Regel zu $N = 4$.

*iii)* Zur Berechnung der numerischen Aufgabe $y = f(\underline{\mathbf{x}})$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\underline{\mathbf{x}}) = (x_1 + x_2)x_2$ betrachte man die beiden Algorithmen $u = x_1 \oplus x_2$, $\tilde{y} = u \odot x_2$; $u = x_1 \odot x_2$, $v = x_2 \odot x_2$, $\tilde{y} = u \oplus v$. Welcher ist zu bevorzugen?

*iv)* Finden Sie eine numerische Aufgabe der Berechnung von $y = g(\underline{\mathbf{x}})$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die stets gut konditioniert ist.