



Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 10

Aufgabe 1. (5 Punkte) Betrachten Sie die stückweise glatte Kurve γ im $\mathbb{R}^2$, die sich zusammensetzt aus

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle,$$

wobei das Vektorfeld F gegeben sei durch

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - x_1^2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei γ im $\mathbb{R}^2$ die aus $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve,

$$\gamma^{(1)}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(2)}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(3)}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Kurve. Es sei weiter $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (5+2 Punkte) Es sei $\rho \geq 0$ fixiert und $f_\rho: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\rho(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2 + \rho)^3} & \text{für } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{für } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

i) Rechnen Sie nach, dass für $\rho > 0$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f_\rho(\underline{x}) \, dx_1 \right] dx_2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f_\rho(\underline{x}) \, dx_2 \right] dx_1 = 0.$$

ii) Rechnen Sie nach, dass i) im Fall $\rho = 0$ falsch ist. Widerspricht das Satz 19.1.2?

Aufgabe 4. (1.5+1.5 Punkte)

i) Es sei $C = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\int_C x_1^2 e^{x_1 x_2} \, dV$.

ii) Es sei $C = [0, 1] \times [0, \pi/4] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\int_C x_1^3 \tan(x_2) \, dV$.

Abgabe. Bis Do., 14.01.2010, Briefkasten am Eingang des Hörsaalgebäudes E2.5, **Leerung 8.30.**

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI3/hmi3.html>