Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 12

Aufgabe 1. (4+1 Punkte)

i) Es sei $\mathbb{R}^3 \supset M = B_1(\underline{\mathbf{0}}) - \{\underline{\mathbf{0}}\} = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < |\underline{\mathbf{x}}| < 1\}$. Zu fixiertem $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\underline{\mathbf{x}}) = |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha}$. Finden Sie eine reguläre Ausschöpfung von M und zeigen Sie, für welche α das uneigentliche Integral

$$\int_M f(\underline{\mathbf{x}}) \, \mathrm{d}V$$

konvergiert. Berechnen Sie das Integral, falls es konvergiert.

ii) Kann das Integral

$$\int_{\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon |\underline{\mathbf{x}}| > 1\}} \frac{e^{|\underline{\mathbf{x}}|}}{|\underline{\mathbf{x}}|} \, \mathrm{d}V$$

konvergieren?

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei γ die aus $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)} &: \ [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix} \,, \\
\gamma^{(2)} &: \ [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix} \,, \\
\gamma^{(3)} &: \ [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \,.
\end{aligned}$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ sei der von γ berandete Normalbereich. Fertigen Sie eine Skizze an (Orientierung des Randes von M andeuten) und berechnen Sie den Flächeninhalt von M mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

Aufgabe 3. (5 Punkte) Es sei γ die aus $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(2)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve, wobei

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)} &: \ [-2,0] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t(-t^2 - t + 2) \end{pmatrix} \,, \\
\gamma^{(2)} &: \ [0,2] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} \,.
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie γ (Nullstellen der zweiten Komponente von $\gamma^{(1)}$ beachten) und berechnen Sie den Flächeninhalt der eingeschlossenen Menge mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Im $\mathbb{R}^3$ sei M der Normalbereich mit Rand $\partial M = S^{(0)} \cup S^{(1)} \cup S^{(2)}$. Die Flächen $S^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, seien hierbei gegeben durch die Parametrisierungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(0)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \\ \sin(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u_1 \le 2\pi, \quad 0 \le u_2 \le 1;$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(1)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \cos(u_2) \\ u_1 \sin(u_2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u_1 \le 1, \quad 0 \le u_2 \le 2\pi;$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(2)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \cos(u_2) \\ u_1 \sin(u_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u_1 \le 1, \quad 0 \le u_2 \le 2\pi.$$

Mit N sei der äußere Normalenvektor an ∂M bezeichnet. Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}$

$$\int_{\partial M} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}A .$$

Abgabe. Bis Do., 28.01.2010, Briefkasten am Eingang des Hörsaalgebäudes E2.5, **Leerung 8.30**.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI3/hmi3.html