Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 6

Aufgabe 1. (5 Punkte) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve der Länge L und $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine monotone C^1-Parametertransformation. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$. Spielt es dabei eine Rolle, ob φ orientierungstreu oder orientierungsumkehrend ist?

Aufgabe 2. (2.5+2.5 Punkte)

i) Es sei $a > 0$ und $I = (-a,a)$. Berechnen Sie die Länge der ebenen Kurve (d.h. der Kurve im $\mathbb{R}^2$)

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I .$$

Skizzieren Sie die Kurve, wie heißt die Kurve (Literatur)?

ii) Betrachten Sie die Fläche, d.h. die Abbildung $F\colon \Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < u < 2\pi,\ -a < v < a\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh(v)\cos(u) \\ \cosh(v)\sin(u) \\ v \end{pmatrix},$$

die durch Rotation der Kurve α entsteht. Skizzieren Sie die Fläche, wie heißt die Fläche (Literatur)?

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \geq 2$, definiert durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 \dots x_m}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^m} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} , \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} . \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^m - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen.

ii) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar im Punkt $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen in $\underline{\mathbf{0}}$.

iii) Zeigen Sie, dass f in $\underline{\mathbf{0}}$ nicht stetig ist. Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\{\underline{\mathbf{a}}_k\}$,

$$\underline{\mathbf{a}}_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ \vdots \\ 1/k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N} .$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert via

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = e^{x_1 x_2}(x_3 \sin^2(x_1^2 x_2) + x_4 \cos^2(x_1^2 x_2)) \ .$$

Berechnen die partiellen Ableitungen von f und geben Sie den Gradienten an. Berechnen Sie weiterhin $D_{\underline{\mathbf{v}}} f$, falls

$$\underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Abgabe. Bis Do., 03.12.2009, Briefkasten am Eingang des Hörsaalgebäudes E2.5, **Leerung 8.30**.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI3/hmi3.html