Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 7

Aufgabe 1. (3+2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ (wie üblich von der Klasse C^1) und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Unter einer Höhenlinie (Niveaumenge im Fall $U \subset \mathbb{R}^m$) versteht man die Menge (abhängig vom Niveau a)

$$N_a f := \{\underline{\mathbf{x}} \in U : \ f(\underline{\mathbf{x}}) = a\} \ .$$

i) Skizzieren Sie ($a > 0$) die Höhenlinien sowie den Gradienten von f im Fall

$$a)\ f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 \ , \ \ U = \mathbb{R}^2 \ , \qquad b)\ f(\underline{\mathbf{x}}) = \|x\|^{-1} \ , \ \ U = \mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{0}}\} \ .$$

Stellen Sie dazu die Höhenlinien als (Spur einer) Kurve in U dar.

ii) Zeigen Sie: Ist eine Höhenlinie durch eine C^1-Kurve $\varphi\colon I \to U$ gegeben, so steht der Gradient von f senkrecht auf der Höhenlinie (d.h. auf φ').

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, f, $g\colon U \to \mathbb{R}$ und $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ seien jeweils von der Klasse C^2. Rechnen Sie die folgenden Regeln nach:

$$i)\ \mathrm{grad}\,(fg) = f\mathrm{grad}\,g + g\mathrm{grad}f \ ; \ \ ii)\ \mathrm{div}\,(fF) = f\mathrm{div}\,F + \langle F, \mathrm{grad}\,f\rangle \ ;$$
$$iii)\ \mathrm{rot}\,(fF) = f\mathrm{rot}\,F - F \times \mathrm{grad}\,f \ ; \ \ iv)\ \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,F) = 0 \ ; \ \ v)\ \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Aufgabe 3. (5 Punkte) Betrachten sie für $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ das Zentralkraft-Vektorfeld

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} \ .$$

Berechnen Sie DF, $\mathrm{div}\,F(\underline{\mathbf{x}})$ sowie $\mathrm{rot}\,F(\underline{\mathbf{x}})$.

Aufgabe 4. (1.5+2+1.5 Punkte)

i) Für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen $h = f \circ g$ berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man partiell direkt ableite:

(a) $f(y) = \ln(y)$, $g(\underline{\mathbf{x}}) = 1 + \|x\|^2$, $h = f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) $f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1 + y_2 \\ e^{y_1} \end{pmatrix}$, $g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $h = f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

ii) Berechnen Sie im Fall (a) $D(Dh)$.

Abgabe. Bis Do., 10.12.2009, Briefkasten am Eingang des Hörsaalgebäudes E2.5, **Leerung 8.30**.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI3/hmi3.html