



Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 9

Aufgabe 1. (5 Punkte) Es sei $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ x_2 \end{pmatrix} =: \underline{y}.$$

Ist die Funktion f lokal umkehrbar? Wenn ja, bestimmen Sie mit Hilfe des Umkehrsatzes die Ableitung der Umkehrfunktion. Machen Sie eine Probe, indem Sie die Umkehrfunktion explizit bestimmen.

Aufgabe 2. (2.5+2.5 Punkte)

i) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2.$$

Existieren globale (d.h. absolute) Extrema von f auf der Menge $\overline{B_1(0)} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$? Falls ja, bestimmen Sie diese.

ii) Existieren globale Extrema von $f: \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) := x_1x_2$, auf

$$\overline{E} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\} ?$$

Wenn ja, berechnen Sie diese.

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = x_1x_2x_3.$$

i) Berechnen Sie den Funktionswert $f(\underline{x})$ für alle kritischen Punkte von f in der Menge $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\underline{x}\| < 1\}$.

ii) Bestimmen Sie alle Extrema von f unter der Nebenbedingung $\|\underline{x}\| = 1$.

iii) Bestimmen Sie alle absoluten Maximierer und Minimierer von f in der Menge $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Warum existieren diese?

Aufgabe 4. (2+3 Punkte)

i) Das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$, die Kurve

$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$ ($a, b > 0$ fixiert). Berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle F, d\underline{x} \rangle$.

Bitte wenden.

- ii) Es sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein konservatives Vektorfeld (siehe Definition 18.1.2). Weiter sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve mit

$$\gamma''(t) = F(\gamma(t)) \quad (\text{Newtonsches Bewegungsgesetz}) .$$

Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)$ und folgern Sie aus Satz 18.1.1 den **Energiesatz**

$$\left[\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \right]_{t_1}^{t_2} = \varphi(\gamma(t_2)) - \varphi(\gamma(t_1)) .$$

Zusatzübung (freiwillig, ohne Punkte, ohne Abgabe)

- i) Es sei $B_1(\underline{0}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und $f: B_1(\underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) .$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f .

- ii) Die Zahl 1 soll so als Summe von drei positiven Zahlen

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 ,$$

dargestellt werden, dass deren Produkt maximal wird. Falls eine Lösung des Problems existiert, wie muss diese aussehen?

Abgabe. Bis Do., 07.01.2010, Briefkasten am Eingang des Hörsaalgebäudes E2.5, **Leerung 8.30.**

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI3/hmi3.html>

Wir wünschen Ihnen

*****Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr*****