Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 1

Aufgabe 1. (je 2.5 Punkte)

i) Gesucht sind Funktionen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die so genannte *homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

lösen. Für welche fixierten $\lambda \in \mathbb{R}$ führt der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ auf eine Lösung?

ii) Haben Sie zwei linear unabhängige Lösungen gefunden?

iii) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = a + bx + cx^2$, a, b, c reelle Konstanten.

Aufgabe 2. (3+1+1 Punkte) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$)

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f\ , \tag{$*$}$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist.

i) Betrachten Sie den *homogenen Fall* $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Menge aller Lösungen von $(*)$ ein Vektorraum ist.

ii) Betrachten Sie den *inhomogenen Fall* $f \not\equiv 0$. Ist in diesem Fall die Menge aller Lösungen ebenfalls ein Vektorraum?

iii) Es sei nun y_{hom} eine Lösung von $L[y] = 0$ und es sei y_{inhom} eine Lösung von $L[y] = f \not\equiv 0$. Zeigen sie, dass $y_{hom} + y_{inhom}$ die Gleichung $L[y] = f$ löst.

Aufgabe 3. (2.5 Punkte) Finden Sie eine Lösung der linearen Differentialgleichung mit *nicht-konstanten Koeffizienten*

$$y'(x) = 2xy(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\ .$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Die Funktionen $\eta_1(x) = x^3$, $\eta_2(x) = |x|^3$ seien für $-1 < a < 1$ auf $I = (a, 1) \subset \mathbb{R}$ definiert.

Für welche a sind die Funktionen auf I linear unabhängig, für welche linear abhängig?

Berechnen Sie weiter $\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) \\ \eta_1'(x) & \eta_2'(x) \end{vmatrix}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 27.10.2011, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html