

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 10

Aufgabe 1. (5 Punkte) Es sei $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > -1\}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \underline{y}.$$

Ist die Funktion f lokal umkehrbar? Wenn ja, bestimmen Sie mit Hilfe des Umkehrsatzes die Ableitung der Umkehrfunktion. Machen Sie eine Probe, indem Sie die Umkehrfunktion explizit bestimmen.

Aufgabe 2. (4+4 Punkte)

i) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{x}) = x_1 e^{x_2^2}.$$

Existieren globale (d.h. absolute) Extrema von f auf der Menge $\overline{B_1(0)} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$? Falls ja, bestimmen Sie diese.

ii) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{x}) = x_1 x_2 x_3.$$

Bestimmen Sie alle absoluten Maximierer und Minimierer von f in der Menge $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Warum existieren diese?

Aufgabe 3. (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3, \quad g(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Nehmen Sie an, dass f ein absolutes Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzt. Bestimmen Sie dieses.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Es sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein konservatives Vektorfeld (siehe Definition 18.1.2). Weiter sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve mit

$$\gamma''(t) = F(\gamma(t)) \quad (\text{Newton'sches Bewegungsgesetz}) .$$

Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)$ und folgern Sie aus Satz 18.1.1 den **Energiesatz**

$$\left[\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \right]_{t_1}^{t_2} = \varphi(\gamma(t_2)) - \varphi(\gamma(t_1)) .$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 12.01.2012, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html

Wir wünschen Ihnen

*****Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr*****