

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 11

Aufgabe 1. (1+3+1 Punkte) Betrachten Sie das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

i) Ist F konservativ?

ii) Betrachten Sie weiter die stückweise glatte Kurve γ im \mathbb{R}^2 , die sich zusammensetzt aus

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \langle F, d\underline{x} \rangle.$$

iii) Finden Sie eine Probe, um ii) zu verifizieren.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei γ die aus $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(2)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve, wobei

$$\gamma^{(1)}: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t(-t^2 - t + 2) \end{pmatrix},$$
$$\gamma^{(2)}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie γ und berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle F, d\underline{x} \rangle$ für das Vektorfeld

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (2.5+2.5 Punkte) Das Vektorfeld $F: \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden.

i) Die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} .$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle$.

ii) Finden Sie $a < b$ und eine Kurve $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(0)$, $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(2\pi)$ und $\int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\mathbf{x} \rangle \neq \int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle$.

Aufgabe 4. (1+1+1.5+1.5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale

- i) $\int_C (4x_1 - x_2) \, dV, \quad C = [0, 1] \times [-1, 2],$
- ii) $\int_C \cos(x_1 + x_2) \, dV, \quad C = [0, \pi/2] \times [0, \pi],$
- iii) $\int_C \frac{x_1^2 + e^{x_2}}{x_3 + 1} \, dV, \quad C = [-1, 2] \times [0, 1] \times [0, e - 1],$
- iv) $\int_C [\ln(x_1) + x_2^2 e^{x_3}] \, dV, \quad C = [1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2].$

Abgabe: Bis Donnerstag, 19.01.2012, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html