Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 13

Aufgabe 1.

i) Es sei $\mathbb{R}^3 \supset M = B_1(\underline{\mathbf{0}}) - \{\underline{\mathbf{0}}\} = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < |\underline{\mathbf{x}}| < 1\}$. Zu fixiertem $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f \colon M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\underline{\mathbf{x}}) = |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha}$. Finden Sie eine reguläre Ausschöpfung von M und untersuchen Sie, für welche α das uneigentliche Integral

$$\int_M f(\underline{\mathbf{x}}) \, \mathrm{d}V$$

konvergiert. Berechnen Sie das Integral, falls es konvergiert.

ii) Kann das Integral

$$\int_{\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon |\underline{\mathbf{x}}| > 1\}} \frac{e^{|\underline{\mathbf{x}}|}}{|\underline{\mathbf{x}}|} \, \mathrm{d}V$$

konvergieren?

Aufgabe 2. Es sei γ die aus $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)} : \quad [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix} \,, \\
\gamma^{(2)} : \quad [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix} \,, \\
\gamma^{(3)} : \quad [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad \gamma^{(3)}(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \,.
\end{aligned}$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ sei der von γ berandete Normalbereich. Fertigen Sie eine Skizze an (Orientierung des Randes von M andeuten) und berechnen Sie den Flächeninhalt von M mithilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Es sei γ die aus $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ und $\gamma^{(3)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve, wobei

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)} :\ [0,2] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad & \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\ , \\
\gamma^{(2)} :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad & \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ t \end{pmatrix}\ , \\
\gamma^{(3)} :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad & \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ sei der von γ berandete Normalbereich. Fertigen Sie eine Skizze an (Orientierung des Randes von M andeuten) und berechnen Sie den Flächeninhalt von M mithilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

Aufgabe 4. Im $\mathbb{R}^3$ sei M der Normalbereich mit Rand $\partial M = S^{(1)} \cup S^{(2)}$. Die Flächen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ seien hierbei gegeben durch die Parametrisierungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(1)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_2 \cos(u_1) \\ u_2 \sin(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}\ , \qquad 0 < u_1 < 2\pi\ ,\ \ 0 < u_2 < 1\ ,$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(2)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_2 \cos(u_1) \\ u_2 \sin(u_1) \\ 1 \end{pmatrix}\ , \qquad 0 < u_1 < 2\pi\ ,\ \ 0 < u_2 < 1\ .$$

Mit N sei der **äußere Normaleneinheitsvektor** an ∂M bezeichnet. Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}$

$$\int_{\partial M} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}A\ .$$

Keine Abgabe. Keine Punkte.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html