

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 4

Aufgabe 1. (3+2 Punkte)

i) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A .

ii) Es sei $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ beliebig. Stehen reelle Eigenvektoren zu verschiedenen reellen Eigenwerten von A immer senkrecht aufeinander?

Aufgabe 2. (5 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine ähnliche Matrix B in Diagonalgestalt. Wie lautet die zugehörige (orthonormale) Transformationsmatrix?

Aufgabe 3. (je 2 Punkte) Seien $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis der \mathbb{R}^2 und $\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ sowie $\underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$. Ferner seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

i) Finden Sie eine reguläre Matrix $S \in M(2, 2)$ mit

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

für alle Vektoren $\underline{\mathbf{v}} = v_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + v_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = u_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + u_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)}$.

ii) Finden Sie eine reguläre Matrix S mit $\tilde{A} = SAS^{-1}$ und $S^{-1} = S^T$.

Bitte wenden.

iii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren (normiert auf die Länge 1) von A und \tilde{A} .

iv) Skizzieren Sie die Mengen

$$E = \{x_1^2 + 4x_2^2 = 1\} \quad \text{und} \quad \tilde{E} = \left\{ \frac{5}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 3x_1x_2 = 1 \right\}.$$

v) Schlagen Sie in der Literatur die Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2 nach.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.11.2011, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html