Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 7

Aufgabe 1. (1+2+2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \geq 2$, definiert durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 \dots x_m}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^m} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}\,, \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^m - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen.

ii) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar im Punkt $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen in $\underline{\mathbf{0}}$.

iii) Zeigen Sie, dass f in $\underline{\mathbf{0}}$ nicht stetig ist. Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\{\underline{\mathbf{a}}_k\}$,

$$\underline{\mathbf{a}}_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ \vdots \\ 1/k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2. (1+2+2 Punkte)

i) Es sei $f\colon \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ -1 < x_1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(1 + x_1)e^{x_2} + \cos(x_3)\,.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\underline{\mathbf{v}}} f(\underline{\mathbf{0}})$, falls $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$\varphi :\ U := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 > 0\} \to \mathbb{R}\,, \qquad \varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan(x_2/x_1)\,,$$

in einem fixierten Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ sowie die Richtungsableitung $D_{\underline{\mathbf{v}}}\varphi(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$ in Richtung $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Es sei $p > 1$ fixiert. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(\underline{\mathbf{x}}) = \|\underline{\mathbf{x}}\|^p \ln(1 + \|\underline{\mathbf{x}}\|^2)\,,$$

in einem fixierten Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie weiter $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (je 2.5 Punkte) Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion

i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u,v) = v^2 - u^2 \quad \text{für alle } \ u,\ v \in \mathbb{R} \quad \text{(hyperbolisches Paraboloid)}\ ,$$

ii) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(u,v) = u^3 - 3uv^2 \quad \text{für alle } \ u,\ v \in \mathbb{R} \quad \text{(Affensattel)}\ ,$$

und bestimmen Sie die Tangentialebene in einem fixierten Punkt $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. (3+2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ (wie üblich von der Klasse C^1) und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Unter einer Höhenlinie (Niveaumenge im Fall $U \subset \mathbb{R}^m$) versteht man die Menge (abhängig vom Niveau a)

$$N_a f := \{\underline{\mathbf{x}} \in U :\ f(\underline{\mathbf{x}}) = a\}\ .$$

i) Skizzieren Sie ($a > 0$) die Höhenlinien sowie den Gradienten von f im Fall

$$a)\ f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_2^2\ ,\ \ U = \mathbb{R}^2\ , \qquad b)\ f(\underline{\mathbf{x}}) = \|x\|^{-1}\ ,\ \ U = \mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{0}}\}\ .$$

Stellen Sie dazu die Höhenlinien als (Spur einer) Kurve in U dar.

ii) Zeigen Sie: Ist eine Höhenlinie durch eine C^1-Kurve $\varphi\colon I \to U$ gegeben, so steht der Gradient von f senkrecht auf der Höhenlinie (d.h. auf φ').

Abgabe: Bis Donnerstag, 08.12.2011, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html