

Höhere Mathematik für Ingenieure III, Blatt 8

Aufgabe 1. (2.5+2.5 Punkte) Für die folgenden Verkettungen $h = f \circ g$ berechne man mithilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man h direkt partiell ableite:

i) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1/x_2 \\ x_2 \\ e^{x_1-x_2} \\ e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_4 \\ y_2 y_3 y_4 \end{pmatrix}.$$

ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_2^2 + x_3^2 \\ 2x_3^2 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{\mathbf{y}}) = y_1 + y_2 + y_3.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ seien jeweils von der Klasse C^2 . Rechnen Sie die folgenden Regeln nach:

- i) $\operatorname{grad}(fg) = f\operatorname{grad}g + g\operatorname{grad}f$; ii) $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}F + \langle F, \operatorname{grad}f \rangle$;
- iii) $\operatorname{rot}(fF) = f\operatorname{rot}F - F \times \operatorname{grad}f$; iv) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}F) = 0$; v) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f) = \underline{0}$.

Aufgabe 3. (5 Punkte) Betrachten Sie für $\underline{\mathbf{x}} \in U = \mathbb{R}^3 - \{\underline{0}\}$ das Zentralkraft-Vektorfeld

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in U.$$

Berechnen Sie DF , $\operatorname{div}F(\underline{\mathbf{x}})$ sowie $\operatorname{rot}F(\underline{\mathbf{x}})$.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 15.12.2011, 08.25 Uhr, Briefkasten U.G. Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI3_11_12/hmi3.html