Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Saarbrücken, 10.02.2009

Klausur zur Vorlesung HMI III

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso das Themengebiet, aus dem die Aufgabe gewählt wurde.

Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für “geratene” Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Systeme linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung; **10 Punkte**)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2. (Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher; **1.5+3+1+4.5 Punkte**)

i) Es sei $f \colon \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ -1 < x_1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(1 + x_1)e^{x_2} + \cos(x_3) .$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\underline{\mathbf{v}}} f(\underline{\mathbf{0}})$, falls $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Es seien $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ und $g \colon U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > 0\} \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1/x_2 \\ x_2 \\ e^{x_1 - x_2} \\ e^{x_2} \end{pmatrix} , \qquad f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_4 \\ y_2 y_3 y_4 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $D(f \circ g)(\underline{\mathbf{x}})$ für $\underline{\mathbf{x}} \in U$.

Bitte wenden.

iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 e^{x_2^2} \ .$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f.

(b) Existieren globale (d.h. absolute) Extrema von f auf der Menge $\overline{B_1(0)} = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3. (3+2+2.5+2.5 Punkte)

i) (Diagonalisierbare Matrizen, Jordansche Normalform)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine ähnliche Matrix B in Diagonalgestalt. Wie lautet die zugehörige (orthonormale) Transformationsmatrix?

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie einen Hauptvektor erster Stufe.

ii) (Kurven im $\mathbb{R}^n$, Kurvenintegrale)
Das Vektorfeld $F\colon \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

(a) Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} .$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle$.

(b) Finden Sie $a < b$ und eine Kurve $\tilde{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(0)$, $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(2\pi)$ und $\int_{\tilde{\gamma}} \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle \neq \int_\gamma \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle$.

Aufgabe 4. (Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$; **5+5 Punkte**)

i) Es sei $M := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 > 0, \ x_2 \geq x_1, \ 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Skizzieren Sie M und berechnen Sie

$$\int_M \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, \frac{x_1}{x_2} \, \mathrm{d}V \ .$$

ii) Es seien

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + \frac{x_2^2}{9} \leq 1 \right\} , \qquad B^c = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \right\} ,$$

$$Q = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \right\} , \qquad M = E \cap B^c \cap Q \ .$$

Skizzieren Sie M und berechnen Sie $\int_M x_1 \, \mathrm{d}V$.