**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
**Universität des Saarlandes**
**P.D. Dr. Michael Bildhauer**
**Dr. Dominic Breit**

Saarbrücken, 07.04.2010

# Klausur zur Vorlesung HMI III

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso das Themengebiet, aus dem die Aufgabe gewählt wurde.

Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

**Aufgabe 1.** (gewöhnliche Differentialgleichungen; **5+5 Punkte**)

*i*) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x} .$$

*ii*) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} .$$

**Aufgabe 2.** (Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher; **3+1.5 +1.5+4 Punkte**)

*i*) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} , \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 e^{x_2} x_3$$

um den Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$ bis einschließlich der Glieder $2^{ter}$ Ordnung (das Restglied ist nicht zu berechnen).

*ii*) Die Funktionen $\phi$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_2^2 + x_3^2 \\ 2x_3^2 \end{pmatrix} , \quad \psi(\underline{\mathbf{y}}) = y_1 + y_2 + y_3 .$$

(a) Berechnen Sie $D(\psi \circ \phi)(\underline{\mathbf{x}})$ **mithilfe der Kettenregel**.

*Bitte wenden.*

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f = \psi \circ \phi$.

*iii)* Betrachten Sie die Funktionen $f$, $g$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 , \qquad g(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 .$$

Nehmen Sie an, dass $f$ ein absolutes Minimum **unter der Nebenbedingung** $g = 0$ besitzt. Bestimmen Sie dieses.

**Aufgabe 3.** (**5+5 Punkte**)

*i)* (Spektraltheorie quadratischer Matrizen)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2-\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A$ sowie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

*ii)* (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)
Es sei $\gamma$ die aus $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ und $\gamma^{(3)}$ zusammengesetzte stückweise glatte Kurve, wobei

$$\gamma^{(1)} : \ [0,2] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\gamma^{(2)} : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ t \end{pmatrix} ,$$
$$\gamma^{(3)} : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} .$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ sei der von $\gamma$ berandete Normalbereich. Fertigen Sie eine Skizze an (Orientierung des Randes von $M$ andeuten) und berechnen Sie den Flächeninhalt von $M$ **mithilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene**. (Zur Erinnerung: Im Gaußschen Satz ist das Vektorfeld $F = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ zu betrachten.)

**Aufgabe 4.** (Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$; **5+5 Punkte**)

*i)* Es seien

$$E_1^c = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \geq 1 \right\} , \qquad E_2 = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x_1^2}{9} + x_2^2 \leq 1 \right\} ,$$
$$Q = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 0 \right\} , \qquad M = E_1^c \cap E_2 \cap Q .$$

Skizzieren Sie $M$ und berechnen Sie $\int_M x_1 \, \mathrm{d}V$.

*ii)* Berechnen Sie

$$\int_C e^{x_3} \, \mathrm{d}V ,$$

wobei $C = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \ \text{ und } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$.