Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Saarbrücken, 31.07.2012

Klausur zur Vorlesung HMI IV, Teil b

Die folgende Klausur besteht aus 3 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Notation in $\mathbb{C}$: $z = x + iy$, $f = u + iv$ und zu fixiertem $0 < r \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\kappa_r(z_0)$ die Parametrisierung der Kreislinie $\kappa_r(z_0)(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, $A_{r_1,r_2}(z_0)$ ist zu fixierten $0 \leq r_1 < r_2$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Aufgabe 1. (holomorphe Funktionen; Singularitäten; **2+2+3 Punkte**)

i) Für welche Konstanten $c \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f(z) = (x + iy)(cx - iy)$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph?

ii) Welche der folgenden Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{C}$:

(a) $f(z) = \exp(\sin(z))$;

(b) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z\overline{z}}$;

(c) $f(z) = \mathrm{Re}\,(-i\sin(iz)) + i\mathrm{Im}\,(\sinh(z))$?

iii) Charakterisieren Sie jeweils alle (isolierten) Singularitäten von:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{z}}; \quad \text{(b) } f(z) = \exp\left(1 + \frac{1}{z}\right); \quad \text{(c) } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z(z + 3i)}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Kurvenintegrale, Laurent-Reihen; Residuensatz; **2.5+4+2.5 Punkte**)

i) Berechnen Sie ($r \neq 1$, $r \neq 3$)

$$\int_{\kappa_r(0)} \left[\frac{1}{(z-i)^2} + e^{z^2} + \frac{1}{z+3} \right] \mathrm{d}z \; .$$

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{2z - 2i - 1}{(z-1)(z-2i)} \; .$$

Berechnen Sie die Laurent-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ auf $A_{1,2}(0)$.

iii) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{\kappa_2(0)} \frac{1}{(1+z^2)^2} \, \mathrm{d}z \; .$$

Aufgabe 3. (Fourier-Reihen; **2.5+4.5+1 Punkte**)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = x + \sin(x) - \pi$ für $0 \leq x < 2\pi$.

i) Skizzieren Sie f (beachten Sie dabei die Monotonie). Bestimmen Sie die explizite Abbildungsvorschrift $f(x) = \ldots$ für $-2\pi \leq x < 0$. Ist f eine gerade bzw. eine ungerade Funktion?

ii) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

iii) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f?

Die Funktion f.