§ 1

Graphenminimalflächen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und sei $f \in C^1(\Omega)$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graph wir mit G_f bezeichnen wollen. G_f ist eine Fläche (= 2–dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$), deren Inhalt durch die Formel

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, du\, dv \tag{1.1}$$

gegeben ist. Hierbei steht $\nabla f(u,v)$ für den Vektor mit den Komponenten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right).$$

Die Formel (1.1) läßt sich auf zwei Wegen einsehen: Entweder man nimmt (1.1) einfach als Definition für den Flächeninhalt eines Graphen (schlecht, da nicht motiviert) oder man definiert auf $\mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales geometrisches Maß (das Hausdorff–Maß $\mathcal{H}^2$) und zeigt, dass das Maß eines Graphen gerade durch die rechte Seite von (1.1) gegeben wird. Wir gehen einen Mittelweg, indem wir uns überlegen, dass

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, du\, dv$$

den Flächeninhalt des Graphen vernünftig wiedergibt: Sei $Q = Q(a)$ ein *kleines* Quadrat in Ω mit Mittelpunkt a. Auf Q können wir $f(z)$ näherungsweise ersetzen durch die affine Funktion $\ell : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\ell(z) := f(a) + \nabla f(a) \cdot (z - a),$$

wobei $z := (u,v)$ ist. Es folgt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx A_Q(\ell),$$

d. h. die Fläche von G_f über Q entspricht in etwa der Fläche des Graphen von ℓ über Q. Wie groß ist nun aber $A_Q(\ell)$ bzw. welchen Wert wird man als sinnvolle Definition von $A_Q(\ell)$ ansehen? Dazu schreibe man

$$G_{\ell|_Q} = L(Q) + L_0 \quad \text{mit} \quad L_0 := \big(0, f(a) - a \cdot \nabla f(a)\big),$$

wobei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch $Lz := \big(z, z \cdot \nabla f(z)\big)$ gegebene lineare Funktion ist. Die Verschiebung L_0 sollte am zu definierenden Flächeninhalt des Graphen von $\ell|_Q$ nichts ändern, so dass wir letztendlich darauf geführt werden, der Menge $L(Q)$ einen Flächeninhalt zuzuordnen. Dazu nehmen wir o. E. an, dass Q achsenparallel ist und die linke untere Ecke gerade im Ursprung liegt:

$$Q = \big\{se_1 + te_2 \;:\; 0 \le s,t \le \varepsilon\big\} = \big\{se_1' + te_2' \;:\; 0 \le s,t \le 1\big\},$$

$$e_1 := (1,0), \quad e_2 := (0,1), \quad \varepsilon := \text{ Kantenlänge von } Q,$$

$$e_1' := (\varepsilon, 0), \quad e_2' := (0, \varepsilon),$$

und

$$L(Q) = \big\{sL(e_1) + tL(e_2) \;:\; 0 \le s,t \le \varepsilon\big\} = \big\{sf_1 + tf_2 \;:\; 0 \le s,t \le 1\big\}$$

$$f_1 := L(e_1'), \quad f_2 := L(e_2').$$

Somit ist $L(Q)$ das von den Vektoren f_1, f_2 aufgespannte Parallelogramm in der Ebene

$$E := \big\{(-\nabla f(a), 1)\big\}^{\perp}.$$

Bezeichnet f_2' die orthogonale Projektion von f_2 auf das orthogonale Komplement von f_1 in E, so gilt bekanntlich

$$\operatorname{Area} L(Q) = |f_1||f_2'|.$$

Wegen

$$f_2' = f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|}\right)\frac{f_1}{|f_1|}$$

wird

$$\begin{aligned} |f_1|^2|f_2'|^2 = |f_1|^2|f_2|^2 - (f_1 \cdot f_2)^2 &= \varepsilon^4\Big(|Le_1|^2|Le_2|^2 - \big(Le_1 \cdot Le_2\big)^2\Big) \\ &= \varepsilon^4\Big(\big(1 + |\partial_u f(a)|^2\big)\big(1 + |\partial_v f(a)|^2\big) - \big(\partial_u f \cdot \partial_v f\big)^2(a)\Big) \\ &= \varepsilon^4\big(1 + |\nabla f(a)|^2\big). \end{aligned}$$

Deshalb gilt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2}\, \operatorname{Area}(Q).$$

Anschaulich ist klar, dass

$$A_\Omega(f) \approx A_{\bigcup_k Q_k}(f)$$

gelten muss, wenn man Ω mit n achsenparallelen Quadraten $Q_k = Q_k(a_k)$ ($k = 1, \ldots, n$) überdeckt. Damit wird also

$$A_\Omega(f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + |\nabla f(a_k)|^2}\, \operatorname{Area}(Q_k) \xrightarrow{n} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, du\, dv$$

bei wachsender Güte n der Zerlegung von Ω in achsenparallele Quadrate.

Vermöge der vorstehenden Rechnung haben wir erkannt, dass

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,du\,dv$$

ein vernünftiger Ausdruck für die Fläche von G_f ist. Es sei ausdrücklich betont, daß $A_\Omega(f)$ durchaus gleich ∞ sein kann. Die Endlichkeit von $A_f(\Omega)$ ist zum Beispiel dann gesichert, wenn sowohl Ω als auch ∇f als beschränkt vorausgesetzt werden.

Nachfolgend seien f von der Klasse $C^2(\Omega)$ und $\varphi \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in einer offenen Kreisscheibe $D_r(z_0)$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$, d. h. es gelte

$$\operatorname{spt}\varphi := \overline{\big\{z \in \Omega \ :\ \varphi(z) \neq 0\big\}} \subset D_r(z_0).$$

Wir schreiben dafür auch $\varphi \in C_0^2\big(D_r(z_0)\big)$.

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig, so unterscheiden sich die Graphen G_f und $G_{f+\varepsilon\varphi}$ höchstens außerhalb des Zylinders $D_r(z_0)\times\mathbb{R}$. Minimiert nun G_f lokal den Flächeninhalt unter allen Graphen über Ω, so ist insbesondere

$$A_{D_r(z_0)}(f) \le A_{D_r(z_0)}(f+\varepsilon\varphi),$$

und damit folgt

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0}\int_{D_r(z_0)} \Big(1+|\nabla f+\varepsilon\nabla\varphi|^2\Big)^{1/2} du\,dv = 0,$$

was nach Differentiation unter dem Integralzeichen äquivalent ist zu

$$\int_{D_r(z_0)} \big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\cdot\nabla\varphi\,du\,dv = 0.$$

Schreibt man

$$\begin{aligned}&\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\cdot\nabla\varphi\\ &\quad = \operatorname{div}\Big(\varphi\,\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\Big) - \operatorname{div}\Big(\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\Big)\,\varphi\end{aligned}$$

und beachtet, dass nach dem Satz von Gauß

$$\int_{D_r(z_0)} \operatorname{div}\Big(\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\cdot\varphi\Big)\,du\,dv = 0$$

ist, erhält man die Gleichung

$$\int_{D_r(z_0)} \operatorname{div}\Big(\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\Big)\,\varphi\,du\,dv = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^2\big(D_r(z_0)\big).$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Größe

$$\operatorname{div}\Big(\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\nabla f\Big)$$

auf $D_r(z_0)$ verschwindet. Da im Falle der lokalen Minimalität dies für jede Kreisscheibe $D_r(z_0)$ richtig sein muss, ist bewiesen:

SATZ 1. 1

Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$A_{\Omega'}(f) \leq A_{\Omega'}(g)$$

für jedes kompakt in Ω enthaltene Teilgebiet Ω' (kurz: $\Omega' \Subset \Omega$) und jede Funktion $g \in C^2(\Omega)$ mit $\operatorname{spt}(f-g) \subset \Omega'$. Dann löst f die sog. **explizite (oder nichtparametrische) Minimalflächengleichung**

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0.$$

$\square$

Bezeichnet Δf den Laplace–Operator

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) f,$$

so läßt sich die explizite Minimalflächengleichung auch schreiben als

$$\left(1+|\nabla f|^2\right) \Delta f = D^2 f(\nabla f, \nabla f),$$

wobei $D^2 f(\nabla f, \nabla f)$ die Anwendung der symmetrischen Bilinearform $D^2 f$ auf das Paar $(\nabla f, \nabla f)$ bedeutet. Ausgeschrieben lautet das Ergebnis:

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0,$$

und man sieht, dass es sich um eine **nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung** handelt.

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, bedeutet die nichtparametrische Minimalflächengleichung geometrisch, dass G_f eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung H ist. Im Falle von allgemeinen Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ bedeutet $H \equiv 0$ jedoch keineswegs, dass S den Flächeninhalt zu seinem Rand minimiert. (Das ist wie in der gewöhnlichen Extremwertrechnung: das Verschwinden der Ableitung garantiert noch nicht, dass man eine Minimalstelle gefunden hat.) Anders verhält es sich, wenn man die zusätzliche Information hat, dass die betrachtete Fläche S ein Graph ist. Genauer gilt:

SATZ 1.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und sei $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Ferner bezeichne M eine (orientierte) C^2–Mannigfaltigkeit mit

(i) $M \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ und

(ii) $\partial M = G_{f|\partial\Omega}$.

Dann ist

$$A_\Omega(f) \leq \operatorname{Area}(M).$$

KOROLLAR

Ist f wie oben und $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $g = f$ auf $\partial\Omega$, so folgt

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g).$$

BEMERKUNG

Ist Ω nicht konvex, so findet man unter Umständen zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M mit

$$\partial M = G_{f|\partial\Omega}$$

und $M \not\subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, für die Area$(M) < A_\Omega(f)$ ist. Satz 1.2 bezieht sich deshalb also nur auf Vergleichsmannigfaltigkeiten M, die innerhalb des Zylinders $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ gelegen sind.

BEWEIS VON SATZ 1.2

Zunächst stehen wir vor dem technischen Problem, den Flächeninhalt Area(M) einer C^2–Mannigfaltigkeit erklären zu müssen. Da diese Einzelheiten zu weit führen würden, sollte man entweder auf alte Analysiskenntnisse zurückgreifen ("Oberflächenmaß") oder wie folgt argumentieren: Für Graphen haben wir uns eine Inhaltsformel überlegt und kennen damit auch den Inhalt von Flächen, die durch Rotation und Translation aus Graphen erzeugt werden. Jede Mannigfaltigkeit M setzt sich aber aus abzählbar vielen Stücken zusammen, die isometrisch zu gewöhnlichen Graphen sind. Durch Zusammensetzen bekommt man schließlich eine Definition für Area(M). Um wenigstens einen Eindruck von der Beweisidee zu bekommen, setzen wir $N := G_f$ und stellen uns die Situation wie in *Fig. 1.1* gezeichnet vor.

Sind u, v wie üblich die Variablen in $\mathbb{R}^2$ und bezeichnet w die noch fehlende Ortskoordinate des $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\nu_N(u,v) := \big(-\nabla f(u,v), 1\big) \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}$$

in jedem Punkt $(u,v) \in \overline{\Omega}$ ein Vektor senkrecht zu N im Punkt $\big(u, v, f(u,v)\big)$.

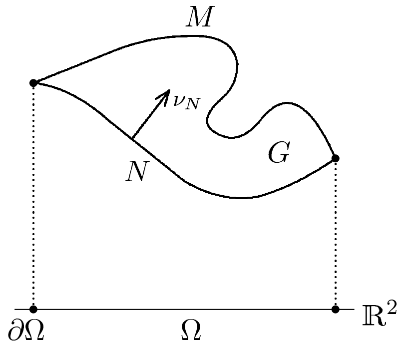

Fig. 1.1

Durch $F(u,v,w) := \nu_N(u,v)$ gewinnen wir ein Vektorfeld auf dem ganzen Zylinder

$\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Man stellt nun fest, dass f die nichtparametrische Minimalflächengleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times \mathbb{R}$$

ist. Es gibt daher ein Vektorfeld $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $F = \operatorname{rot} \Phi$. Damit wird wegen

$$F = \nu_N \text{ auf } N, \quad |F| = 1$$

und mit dem Satz von Stokes (τ_N bezeichne das Einheitstangentenfeld an ∂N und $\mathcal{H}^k$ das k–dimensionale Hausdorff–Maß)

$$\begin{aligned} \operatorname{Area}(N) &= \int_N d\mathcal{H}^2 = \int_N \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_N \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial N} \Phi \cdot \tau_N \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial M} \Phi \cdot \tau_M \, d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_M \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_M \, d\mathcal{H}^2 = \int_M F \cdot \nu_M \, d\mathcal{H}^2 \le \operatorname{Area}(M) \end{aligned}$$

Dabei haben wir unterstellt, dass die Vergleichsfläche M orientiert ist, was für die Existenz des Einheitsnormalenfeldes ν_M notwendig ist.

Wenn man auf den Satz von Stokes verzichten möchte, läßt sich der Beweis auch mit dem Satz von Gauß führen, wobei allerdings auch wieder an die Anschauung appelliert werden muss: Wir unterstellen, dass M und N Rand eines Gebietes G (*Fig. 1.1*) sind und dass sich der Gauß–Satz auf G anwenden läßt. Mit den Notationen von oben ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \operatorname{div} F \, du \, dv \, dw = \int_{\partial G} F \cdot \nu_G \, d\mathcal{H}^2 = \int_N F \cdot \nu_N \, d\mathcal{H}^2 + \int_M F \cdot \nu_M \, d\mathcal{H}^2 \\ &= \operatorname{Area}(N) + \int_M F \cdot \nu_M \, d\mathcal{H}^2, \end{aligned}$$

woraus mit $F \cdot \nu_M \ge -1$ die Behauptung folgt. Die Minimalflächengleichung ist hier wieder nur in der Form $\operatorname{div} F = 0$ eingegangen. □

Bis jetzt haben wir noch keine Minimalfläche explizit konstruiert. Unser Fernziel ist natürlich die Lösung des

Plateau–Problem für Graphenminimalflächen:

> Zu einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, die Graph über dem Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist, finde man $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
>
> (i) $\Gamma = G_{f|\partial\Omega}$,
>
> (ii) $A_\Omega(f) \le A_\Omega(g)$ für alle $g \in \mathcal{G}$,
>
> wobei $\mathcal{G} := \{ g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R};\ \Gamma = G_{g|\partial\Omega} \}$ ist.

Anschaulich würde man so vorgehen: Man wählt eine (Minimal–) Folge (f_n) mit

$$A_\Omega(f_n) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f_n|^2} \, dx \, dy \xrightarrow{n} \inf_{g \in \mathcal{G}} A_\Omega(g)$$

in der Hoffnung, aus (f_n) eine konvergente Teilfolge auswählen zu können, die natürlich gegen die gesuchte Lösung konvergieren sollte. Dieser Zugang mit Variationsmethoden ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden, so dass wir zunächst dem historischen Weg folgen, und durch spezielle Ansätze Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung erzeugen.

Wir suchen also Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

1. Ebenen:
Für $A \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\ell(u,v) := A \cdot (u,v) + a,$$

also eine affin–lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$, deren Graph G_ℓ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellt. Natürlich ist ℓ Lösung der Minimalflächengleichung, und ein tiefer auf **Bernstein** zurückgehender Satz besagt, dass ℓ auch die einzige ganze (= auf der ganzen Ebene definierte) Lösung der Minimalflächengleichung ist. Das werden wir später beweisen.

2. Erste Scherk–Fläche:
Man sucht Lösungen f der Form

$$f(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

mit noch zu bestimmenden reellen Funktionen von einer reellen Variablen. Die Minimalflächengleichung reduziert sich auf

$$\left(1+\psi'(v)^2\right)\varphi''(u) + \left(1+\varphi'(u)\right)^2 \psi''(v) = 0$$

bzw.

$$\varphi''(u)/\left(1+\varphi'(u)^2\right) = -\psi''(v)/\left(1+\psi'(v)^2\right).$$

Da die linke Seite nur von u, die rechte nur von v abhängt, folgt die Konstanz der Ausdrücke, so dass wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\rho'' = c\left(1+(\rho')^2\right) \quad (c \in \mathbb{R})$$

zu lösen haben. Mit der Substitution $\lambda := \rho'$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\lambda' = c(1+\lambda^2),$$

und unter Beachtung von $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}$ folgt

$$\lambda(t) = \tan(ct+d).$$

Integriert man λ und kehrt zurück zu $f(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, so bekommt man die allgemeine Lösung

$$f(u,v) = \frac{1}{a}\log\frac{\cos a(u-u_0)}{\cos a(v-v_0)} + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

Die durch

$$f(u,v) = \log \frac{\cos u}{\cos v}$$

gelieferte Fläche heißt **Scherk's erste Fläche** (*Fig. 1.2*). Als möglichen Definitionsbereich findet man das Schachbrett

$$\big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |u - k\pi| < \pi/2,\ |v - \ell\pi| < \pi/2,\ k + \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade}\big\}.$$

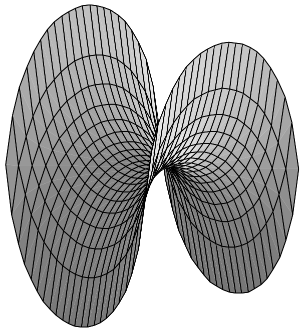

Fig. 1.2

3. Der Ansatz

$$\partial^2 f/\partial u^2 \equiv 0$$

führt auf die Bestimmungsgleichung

$$f(u,v) = au\,\varphi(v) + \psi(v)$$

mit reellen Funktionen φ, ψ und $a \in \mathbb{R}$. Ist $a = 0$, so reduziert sich die Minimalflächengleichung auf $\psi'' \equiv 0$, d. h.

$$f(u,v) = cv + d \quad (c, d \in \mathbb{R})$$

und den Fall affin–linearer f haben wir schon unter 1. beschrieben. Sei deshalb $a \neq 0$. Dann ist die Minimalflächengleichung äquivalent zu

$$\big(1 + a^2\varphi^2(v)\big)\big(au\,\varphi''(v) + \psi''(v)\big) = 2a^2\,\varphi(v)\varphi'(v)\big(au\,\varphi'(v) + \psi'(v)\big)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\psi''(v)\big(1 + a^2\varphi^2(v)\big) + au\,\varphi''(v)\big(1 + a^2\varphi^2(v)\big) = 2a^2\varphi(v)\varphi'(v)\psi'(v) + 2a^3u\,\varphi(v)\varphi''(v)^2,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 2a^2\varphi(v)\varphi'(v)\psi'(v) &= \big(1 + a^2\varphi^2(v)\big)\,\psi'(v), \\ 2a^3\varphi(v)\varphi(v)^2 &= \big(1 + a^2\varphi^2(v)\big)\,a\varphi''(v). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dies wiederum ist, wenn φ' und ψ' nullstellenfrei sind gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \psi''/\psi' &= 2a^2\varphi'\varphi/\left(1 + a^2\varphi^2\right) \\ \varphi''/\varphi' &= 2a^2\varphi'\varphi/\left(1 + a^2\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Man rechnet nun nach, dass die zweite Gleichung in (1.3) umgeformt werden kann zu

$$0 = \left(\frac{\varphi'}{a^2\varphi^2+1}\right)' = \left(\frac{1}{a}\,\arctan(a\varphi)\right)''. \tag{1.4}$$

Damit muss also

$$\arctan(a\varphi) = abv + ac \quad (b, c \in \mathbb{R})$$

sein. Schreibt man b statt ab und c statt ac, so erhält man als allgemeine Lösung von (1.3), (1.4)

$$\varphi(y) = \frac{1}{a}\,\tan(bv + c).$$

Gleichzeitig liefert (1.3) $\psi''/\psi' = \varphi''/\varphi'$, so dass $\left(\psi'/\varphi'\right)' = 0$ sein muss. Mithin ist $\psi' = c_1\varphi'$ oder $\psi = c_1\varphi + c_2$. Setzt man die Ergebnisse zusammen, so findet man mit Integrationskonstanten $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, u_0, v_0

$$f(u,v) = \tilde{a}(u-u_0)\tan\left(\tilde{b}(v-v_0)\right) + \tilde{c}.$$

Der Graph G_f von f stimmt bis auf Streckungen und Verschiebungen mit dem der Funktion

$$(u,v) \to \alpha u \tan v$$

überein (*Fig. 1.3*).

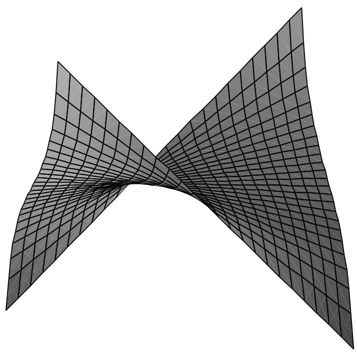

Fig. 1.3

4. Von **Scherk** stammt der Ansatz, Graphenminimalflächen mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f/\partial u}{\left(1+|\nabla f|^2\right)^{1/2}}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f/\partial v}{\left(1+|\nabla f|^2\right)^{1/2}}\right)$$

zu suchen. Offenbar ergibt vorstehende Gleichung sofort

$$\operatorname{div}\left(\nabla f/\sqrt{1+|\nabla f|^2}\right) = 0.$$

Der Ansatz impliziert, dass

$$\varphi := \partial f/\partial u\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2}, \quad \psi := \partial f/\partial v\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2}$$

nur Funktionen von v bzw. u sind. Außerdem gilt

$$\varphi^2+\psi^2=\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1}|\nabla f|^2 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{1-\varphi^2-\psi^2}=1\Big/\sqrt{1+\nabla f|^2},$$

so dass wir

$$\partial f/\partial u=\varphi\Big/\sqrt{1-\varphi^2-\psi^2},\quad \partial f/\partial v=\psi/\sqrt{1-\varphi^2-\psi^2}$$

schreiben können. Nun benutzt man die Symmetrie $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$ und findet:

$$\psi'(1-\varphi^2-\psi^2)+\psi^2\psi'=\varphi'(1-\varphi^2-\psi^2)+\varphi'\varphi^2.$$

Daraus folgt für alle u,v die Beziehung

$$\psi'(u)/\left(1-\psi^2(u)\right)=\varphi'(v)/\left(1-\varphi^2(v)\right),$$

was nur nur dann möglich ist, wenn für $a\in\mathbb{R}$

$$\psi'(u)/\left(1-\psi^2(u)\right)\equiv a,\quad \varphi'(v)/\left(1-\varphi^2(v)\right)\equiv a$$

erfüllt ist. Lösungen davon sind

$$\varphi(v)=\tanh a(v-v_0),\quad \psi(u)=\tanh a(u-u_0).$$

Für $a=1$ und $(u_0,v_0)=(0,0)$ erhält man (*Fig. 1.4*):

$$f(u,v)=\arcsin(\sinh u\sinh v).$$

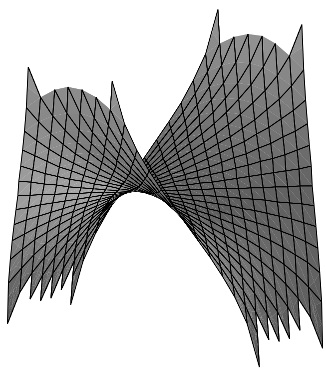

Fig. 1.4

$\square$

Mit diesen Beispielen zu expliziten Lösungen der Minimalflächengleichung in Graphenform wollen wir es bewenden lassen. Natürlich hat man sich im vorigen Jahrhundert ausgiebig bemüht, möglichst viele konkrete Minimalflächen, die nicht notwendig Graphen über ebenen Gebieten sind, zu bestimmen. Dies geschieht durch Verknüpfen der notwendigen Bedingung $H\equiv 0$ mit gewissen Symmetrieannahmen. Eine Übersicht über die so erzeugten klassischen Minimalflächen (z.B. das Katenoid) findet man mit den entsprechenden Rechnungen in den Kapiteln “Spezielle Minimalflächen” bei [Nitsche] oder [Lawson].