§ 2

Lokale Beschreibung von Flächen

Dieser Abschnitt enthält die allgemeine Definition von Flächen in $\mathbb{R}^3$ als zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und gibt eine Übersicht über elementare geometrische Konzepte wie Tangentialraum, Krümmung, etc. (Als Quelle zum Selbststudium empfehlen wir das Buch von [Do Carmo].)

DEFINITION

Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ heißt Fläche der Differenzierbarkeitsklasse C^r ($r \in \mathbb{N}$), falls es zu jedem $p \in S$ offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $F : U \to V$ gibt, so dass folgende Aussagen gelten:

(i) F ist von der Klasse C^r.

(ii) $F(U) = S \cap V$.

(iii) F ist injektiv.

(iv) $DF(u, v)$ hat in allen $(u, v) \in U$ den maximalen Rang 2.

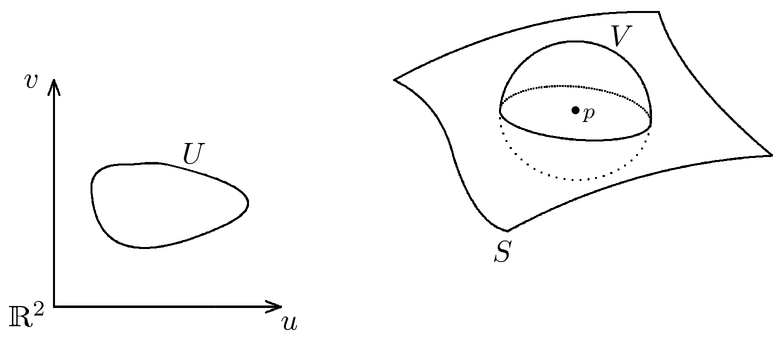

Fig. 2.1

Man nennt F eine **lokale Parametrisierung** oder ein **lokales Koordinatensystem** von S bei p.

Bedingung (iv) besagt, dass die Vektoren $\partial_u F(u,v)$, $\partial_v F(u,v) \in \mathbb{R}^3$ an jeder Stelle $(u,v) \in U$ linear unabhängig sein müssen. Folglich kann man sich eine Fläche S lokal so vorstellen, dass man sie durch Verbiegen eines kleinen Stücks der Ebene (durch F) erzeugt. Die Injektivität von F schließt Selbstdurchschneidungen der Fläche S aus.

BEISPIEL

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^r(\Omega)$. Dann ist der Graph G_f von f eine Fläche der Klasse C^r, die sogar eine globale Parametrisierung, nämlich die Graphenabbildung

$$\Omega \ni (u,v) \mapsto \big(u, v,\ f(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3,$$

besitzt.

Verbunden mit dem Flächenbegriff ist das geometrische Konzept der Tangentialebene.

DEFINITION

Ein Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ heißt Tangentenvektor an die Fläche S im Punkt p, wenn es eine Kurve γ in S gibt mit

$$\gamma(0) = p, \qquad \dot\gamma(0) = \eta.$$

Die Menge aller Tangentenvektoren an S in p bezeichnen wir mit T_pS.

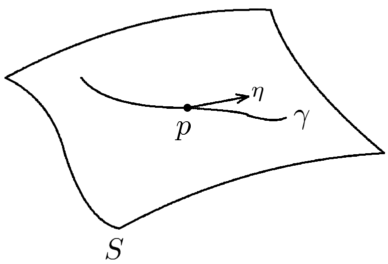

Fig. 2.2

Eine einfache Überlegung zeigt:

LEMMA 2.1

Sei S eine Fläche, $p \in S$ und F eine lokale Parametrisierung von S bei p mit $F(u_0, v_0) = p$. Dann gilt:

(a) T_pS ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, genannt **Tangentialebene** an die Fläche in p.

(b) T_pS wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\partial_u F(u_0, v_0)$, $\partial_v F(u_0, v_0)$, also

$$T_pS = DF(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2)\,.$$

BEWEIS Übungsaufgabe!

Ist F wie oben eine lokale Parametrisierung bei $p \in S$, so gilt:

$$\partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v) \in \Big[T_{F(u,v)}S\Big]^{\perp}$$

für alle Punkte (u, v) aus dem Definitionsbereich von F. Mit anderen Worten: Ist $q \in S$ nahe bei p, so wird durch

$$\mathcal{N}(q) := \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{|\partial_u F \times \partial_v F|}$$

ein **lokales Normalenfeld** von S bei p erklärt.

Eine interessante geometrische Frage ist, ob man eine Fläche S stets mit einem globalen Normalenfeld $\overline{\mathcal{N}}$ versehen kann, d. h. $\overline{\mathcal{N}}$ hängt stetig vom Fußpunkt p ab und erfüllt $\left|\overline{\mathcal{N}}(p)\right| = 1$ sowie $\overline{\mathcal{N}}(p) \in (T_pS)^{\perp}$ für alle $p \in S$. Das Beispiel des Möbiusbandes (*Fig. 2.3*) zeigt, dass globale Normalenfelder nicht existieren müssen. Vielmehr ist diese Eigenschaft äquivalent zur **Orientierbarkeit** von S.

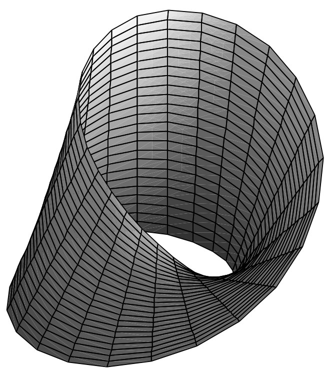

Fig. 2.3

□

Im Falle eines Graphen $S = G_f$ kann man sofort ein (globales) Normalenfeld aufschreiben:

$$\big(-\nabla f(u,v), 1\big) \Big/ \sqrt{1 + \big|\nabla f(u,v)\big|^2};$$

man nennt dieses das kanonische "nach oben zeigende" Einheitsnormalenfeld der Graphenfläche.

Uns interessieren im Folgenden nur lokale Eigenschaften von Flächen, deshalb können wir uns direkt auf den Fall beschränken, dass

$$S = F(\Omega)$$

gilt mit einer regulären Parametrisierung $F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$, wobei F injektiv und r–mal stetig differenzierbar und $\partial_u F \times \partial_v F \neq 0$ ist. (Offenbar bedeutet letzteres gerade, dass das Differential von F überall Rang 2 hat.)

Für diesen Fall wollen wir uns überlegen, dass

$$\text{Area}(S) := \int_\Omega |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv$$

eine sinnvolle Definition für den Flächeninhalt von S ergibt.

Wie bei Graphen zerlegt man Ω in kleine achsenparallele Quadrate Q und ersetzt dort $F(u,v)$ durch die affin lineare Approximation

$$L(u,v) = F(u_0,v_0) + DF(u_0,v_0)(u-u_0, v-v_0).$$

Dann entspricht das Flächenstück $F(Q)$ dem Anteil $L(Q)$, und genau wie vorhin erhält man

$$|Q| \Big(\big|\partial_u F(u_0,v_0)\big|^2 \big|\partial_v F(u_0,v_0)\big|^2 - \big(\partial_u F(u_0,v_0) \partial_v F(u_0,v_0)\big)^2 \Big)^{1/2}$$

für den Flächeninhalt von $L(Q)$. Wegen

$$\Big(\dots \Big)^{1/2} = \big|\partial_u F(u_0,v_0) \times \partial_v F(u_0,v_0)\big|$$

folgt durch Approximation die angestrebte Beziehung.

DEFINITION

Es sei $S = F(\Omega)$ eine reguläre parametrisierte Fläche. Dann heißt

$$\text{Area}(S) := \int_\Omega |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv$$

der **Flächeninhalt** von S.

BEMERKUNG (Parameterinvarianz)

Ist $\varphi : \Omega' \to \Omega$ ein Diffeomorphismus des Gebietes $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ auf Ω, so parametrisiert $\tilde{F} := F \circ \varphi$ natürlich auch die Fläche S. Die bekannte Transformationsregel für Integrale ergibt

$$\int_\Omega |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv = \int_{\Omega'} |\partial_u \tilde{F} \times \partial_v \tilde{F}| \, du \, dv,$$

d. h. Area(S) hängt nicht von der speziell gewählten Parametrisierung ab. (Für eine allgemeine Definition des Flächeninhalts, die nicht an eine Parametrisierung von S geknüpft ist, vergleiche man [Do Carmo], Kapitel 2.8.) □

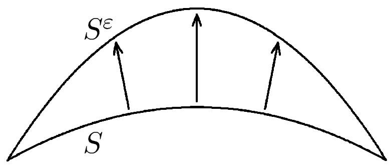

Fig. 2.4

Sei $S = F(\Omega)$ eine regulär parametrisierte Fläche. Anschaulich (wie auch bei den Graphen) nennt man S lokal flächenminimal, wenn gilt:

$$\text{Area}(S) \leq \text{Area}(\tilde{S})$$

für jede Fläche $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$, die sich von S nur innerhalb einer kleinen Kugel unterscheidet, die den Rand von S nicht trifft. Solche Vergleichsflächen $\tilde{S}$ kann man wie folgt erzeugen: Für $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \equiv 0$ nahe $\partial\Omega$ und $|\varepsilon|$ genügend klein ist

$$F^\varepsilon(u,v) := F(u,v) + \varepsilon\, \varphi(u,v) \mathcal{N}(u,v)$$

reguläre Parametrisierung einer Fläche S^ε, die durch normale Verschiebung aus S entsteht (*Fig. 2.4*). Die notwendige Begingung für Minimalität lautet:

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} \text{Area}(S^\varepsilon) = 0,$$

und wir wollen nachfolgend dieser Gleichung einen geometrischen Gehalt geben. Dies führt uns zwangsläufig auf den

Krümmungsbegriff für Flächen:

Sei $S = F(\Omega), F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$, eine regulär parametrisierte Fläche und $p \in S$ beliebig. Anschaulich wird man die Krümmung von S bei p durch die Änderung des Normalenfeldes $\mathcal{N}$ messen wollen, die entsteht, wenn man auf S längs einer Kurve γ

durch p fortschreitet.

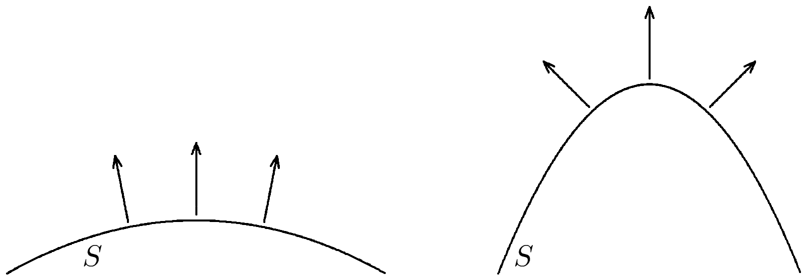

Fig. 2.5

Das heißt präzise: Große Krümmung liegt vor, wenn $\mathcal{N}$ seine Richtung bei p schnell verändert, die Krümmung ist dagegen fast 0, wenn $\mathcal{N}$ — wie bei einer Ebene — nahezu konstant bleibt (*Fig. 2.5*).

Um zu einer Definition zu gelangen, wählen wir ein $\tau \in T_pS$ sowie eine Kurve γ in S mit $\gamma(0) = p$ sowie $\dot{\gamma}(0) = \tau$. Dann ist $t \mapsto \mathcal{N}\big(\gamma(t)\big)$ eine Kurve auf der Sphäre S^2 mit $\mathcal{N}\big(\gamma(0)\big) = \mathcal{N}(p)$ und

$$\frac{d}{dt|_0}\mathcal{N}\big(\gamma(t)\big) \perp \mathcal{N}(p).$$

Die letzte Beziehung besagt nun gerade

$$\frac{d}{dt|_0}\mathcal{N}\big(\gamma(t)\big) \in T_pS.$$

Da die Bildung $\frac{d}{dt|_0}\mathcal{N}\big(\gamma(t)\big)$ nicht von der speziellen Wahl der Kurve γ abhängt (sofern diese $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$ erfüllt) und die Zuordnung

$$T_pS \ni \tau \mapsto \frac{d}{dt|_0}\mathcal{N}\big(\gamma(t)\big) \in T_pS$$

zudem linear ist, vergibt man folgende

BEZEICHNUNG

Das Normalenfeld $\mathcal{N} : S \to S^2$ der Fläche S heißt **Gauß–Abbildung** von S. Die oben in jedem Punkt $p \in S$ erkärte lineare Abbildung $T_pS \to T_pS$ heißt das **Differential** in p der Gauß –Abbildung, i. Z. $d\mathcal{N}_p$.

ANMERKUNG

(1) Da $\mathcal{N}$ nur auf S erklärt ist, läßt sich die Gauß –Abbildung nicht im üblichen Sinn ableiten, man kann lediglich längs Kurven in S differenzieren.

(2) Offenbar ist $d\mathcal{N}_p$ ein Gradmesser für das Krümmungsverhalten der Fläche S.

LEMMA 2.2

Das Differential $d\mathcal{N}_p$ ist eine **selbstadjungierte** lineare Abbildung $T_pS \to T_pS$.

BEWEIS

Eine lineare Abbildung $A : T_pS \to T_pS$ heißt selbstadjungiert (oder auch symmetrisch), wenn

$$A(\tau) \cdot \eta = \tau \cdot A(\eta)$$

für alle Vektoren τ, $\eta \in T_pS$ ist. (Hierbei steht "$\cdot$" für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.)

Sei F wie üblich die Parametrisierung von S und $\alpha(t)$ eine Kurve in S mit $\alpha(0) = p$. Schreibt man

$$\alpha(t) = F\big(\beta(t)\big)$$

mit einer geeigneten ebenen Kurve $\beta(t) := \big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)$ im Definitionsgebiet von F, so folgt:

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}_p\big(\dot{\alpha}(0)\big) &= \frac{d}{dt|_0}\,\mathcal{N}\big(\alpha(t)\big) = \frac{d}{dt|_0}\,(\mathcal{N} \circ F)\big(\beta(t)\big) \\ &= \frac{\partial N}{\partial u}\big(\beta(0)\big)\,\beta_1'(0) + \frac{\partial N}{\partial v}\big(\beta(0)\big)\,\beta_2'(0), \end{aligned}$$

wobei u, v die Variablen im Definitionsgebiet von F bezeichnen, und $N := \mathcal{N} \circ F$ ist. Für die speziellen Tangentenvektoren ($p := F(u_0, v_0)$)

$$\frac{\partial}{\partial u}\,F(u_0, v_0) =: \tau_1, \quad \frac{\partial}{\partial v}\,F(u_0, v_0) =: \tau_2$$

ergibt sich ($\beta(t) = (u_0, v_0) + t\,(1, 0)$ bzw. $(u_0, v_0) + t\,(0, 1)$)

$$d\mathcal{N}_p(\tau_1) = \frac{\partial}{\partial u}\,N(u_0, v_0), \quad d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \frac{\partial}{\partial v}\,N(u_0, v_0).$$

Nun ist $d\mathcal{N}_p$ linear und jeder Tangentenvektor $\tau \in T_pS$ eine Linearkombination von τ_1, τ_2. Die Symmetrie von $d\mathcal{N}_p$ ergibt sich demnach, wenn man

$$\tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \tau_2 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_1) \tag{2.1}$$

verifizieren kann. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) &= \frac{\partial}{\partial u}\,F(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\,N(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}F \cdot N\right)(u_0, v_0) - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \end{aligned}$$

denn $\frac{\partial F}{\partial u}$ ist tangential, und somit senkrecht zu N. Die Symmetrie der zweiten Ableitung liefert

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)\,,$$

und durch analoge Rechnung folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) = \tau_2 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_1),$$

also ist (2.1) bewiesen. $\square$

DEFINITION

Die durch

$$\mathit{II}_p(\xi, \eta) := -d\mathcal{N}_p(\xi) \cdot \eta$$

auf T_pS definierte symmetrische Bilinearform heißt die **zweite Fundamentalform** von S bei p.

BEMERKUNG

(1) Das Minuszeichen in der Definition hat historische Gründe.

(2) II_p ist eng an die Wahl des kanonischen Normalenfeldes geknüpft, d. h. ersetzt man $\mathcal{N}$ durch $-\mathcal{N}$ (Umkehr der Orientierung), so ändert II_p das Vorzeichen. Aus diesem Grund betrachtet man oft die

Vektorielle zweite Fundamentalform:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathit{II}}_p : T_pS \times T_pS &\to \left[T_pS\right]^{\perp},\\ (\xi, \eta) &\mapsto -d\mathcal{N}_p(\xi) \cdot \eta \mathcal{N}(p),\end{aligned}$$

die offensichtlich invariant ist gegen Änderungen der Orientierung. Außerdem ist $\tilde{\mathit{II}}_p$ nicht an die Existenz von globalen Normalenfeldern geknüpft, und kann daher für beliebige C^2–Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ eingeführt werden.

Wir geben noch eine (vgl. [Do Carmo], S. 16 f. und S. 142 f.)

Geometrische Interpretation von $\mathbf{II_p}$:

Seien $p \in S$ und $\xi \in T_pS$ mit $|\xi| = 1$. Man wählt eine Kurve $\alpha(t)$ in S mit

$$\alpha(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = \xi \quad \text{und} \quad \left|\dot{\alpha}(t)\right| \equiv 1$$

(Parametrisierung nach der Bogenlänge). Wegen $\mathcal{N}\big(\alpha(t)\big) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$ wird

$$\mathit{II}_p(v, v) = -d\mathcal{N}_p(v) \cdot v = -\frac{d}{dt|_0}\mathcal{N}\big(\alpha(t)\big) \cdot \dot{\alpha}(0) = \mathcal{N}(0) \cdot \ddot{\alpha}(0),$$

wobei $\ddot{\alpha}(0)$ bekanntlich der Krümmungsvektor an α zur Zeit 0 ist, so dass $\mathit{II}_p(v, v)$ den Krümmungsvektor senkrecht zur Fläche S angibt. $\square$

Kehren wir zurück zum Differential $d\mathcal{N}_p$ der Gauß–Abbildung: Die Symmetrie der linearen Abbildung ergibt sofort (vgl. [Do Carmo], S. 216)

LEMMA 2.3

Es gibt eine orthonormale Basis ξ, η in T_pS, bestehend aus Eigenvektoren von $d\mathcal{N}_p$, d. h.

$$d\mathcal{N}_p(\xi) = -k_1\xi, \quad d\mathcal{N}_p(\eta) = -k_2\eta,$$

wobei die Vorzeichenwahl für die Eigenwerte $-k_1$, $-k_2$ wieder historische Gründe hat.

DEFINITION

Die negativen Eigenwerte k_1, k_2 heißen **Hauptkrümmungen**, die zugehörigen Vektorenn ξ, η entsprechend **Hauptkrümmungsrichtungen** von S bei p. Man bekommt k_1, k_2 als Extremwerte von

$$\big\{w \in T_pS : |w| = 1\big\} \ni v \mapsto I\!I_p(v, v).$$

Man nennt

$$H := \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{spur}\, d\mathcal{N}_p$$

die **mittlere Krümmung** S bei p und

$$K := k_1k_2 = \det d\mathcal{N}_p$$

die **Gauß–Krümmung** von S bei p.

BEMERKUNG

Wir betrachten zur Vereinfachung nur global parametrisierte Flächen $S = F(\Omega)$ und beziehen uns stets auf das Normalenfeld $\mathcal{N}(p)$. Insbesondere ändert $H(p)$ (wie auch $I\!I_p$) das Vorzeichen, wenn man zu einer anderen Orientierung übergeht. Zur Vermeidung dieser Orientierungsabhängigkeit betrachtet man in der Regel den **mittleren Krümmungsvektor**

$$\mathbf{H}(p) := H(p)\,\mathcal{N}(p),$$

der sich bei Ersetzung von $\mathcal{N}$ durch $-\mathcal{N}$ nicht ändert. Außerdem läßt sich $\mathbf{H}$ auch für beliebige (nicht notwendig orientierbare) Flächen definieren. Dazu wählt man einfach lokal in der Nähe eines Punktes p ein Normalenfeld (dies existiert immer, da eine C^2–Mannigfaltigkeit ja lokal parametrisiert werden kann).

Wir berechnen nun die erste Variation des Flächeninhalts Area(S) und stellen den Zusammenhang zur mittleren Krümmung her: Zunächst erinnern wir an die Formel

$$\mathrm{Area}(S) = \int_\Omega |\partial_u F \times \partial_v F|\, du\, dv = \int_\Omega \sqrt{\det g}\, du\, dv,$$

wobei

$$g_{11} := \partial_u F \cdot \partial_u F, \quad g_{12} := \partial_u F \cdot \partial_v F =: g_{21}, \quad g_{22} := \partial_v F \cdot \partial_v F$$

die Koeffizienten der Darstellungsmatrix $g := \big(g_{ij}\big)$ der sog. ersten Fundamentalform von S sind.

Seien $N(u,v) := \mathcal{N}\big(F(u,v)\big)$, $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
Man bildet mit

$$F^\varepsilon(u,v) := F(u,v) + \varepsilon\,\varphi(u,v)N(u,v) =: F(u,v) + \varepsilon\Psi(u,v)$$

die durch normale Variation entstehende Vergleichsfläche $S^\varepsilon = F^\varepsilon(\Omega)$ (vgl. *Fig. 2.4*), deren Inhalt durch

$$\mathrm{Area}(S^\varepsilon) = \int_\Omega \sqrt{\det g^\varepsilon}\, du\, dv,$$

$$g_{11}^\varepsilon := \partial_u F^\varepsilon \cdot \partial_u F^\varepsilon, \quad g_{12}^\varepsilon := \partial_u F^\varepsilon \cdot \partial_v F^\varepsilon =: g_{21}^\varepsilon, \quad g_{22}^\varepsilon := \partial_v F^\varepsilon \cdot \partial_v F^\varepsilon$$

gegeben ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon|_0}\,\mathrm{Area}(S^\varepsilon) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\sqrt{\det g^\varepsilon}\, du\, dv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{\det g}}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\,\det g^\varepsilon\, du\, dv \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \det\big(g_{ij}^\varepsilon\big) &= |\partial_u F|^2|\partial_v F|^2 - \big(\partial_u F\cdot\partial_v F\big)^2 \\ &\quad + 2\varepsilon\big[|\partial_u F|^2\partial_v F\cdot\partial_v\Psi + |\partial_v F|^2\partial_u F\cdot\partial_u\Psi\big] \\ &\quad - 2\varepsilon\,\partial_u F\cdot\partial_v F\,\big[(\partial_u F\cdot\partial_v\Psi) + (\partial_v F\cdot\partial_u\Psi)\big] + \text{Terme mit Vorfaktor } \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\,\det\big(g_{ij}^\varepsilon\big) &= 2\big(|\partial_u F|^2\partial_v F\cdot\partial_v\Psi + |\partial_u F|^2\partial_u F\cdot\partial_u\Psi\big) \\ &\quad - 2\,\partial_u F\cdot\partial_v F\,\big(\partial_u F\cdot\partial_v\Psi + \partial_v F\cdot\partial_u\Psi\big). \end{aligned}$$

Nun benutzt man die für $i,\ j\in\{1,2\}$ gültige Beziehung

$$\begin{aligned} \partial_i\Psi\cdot\partial_j F &= \partial_i(\varphi N)\cdot\partial_j F = \partial_i\varphi\, N\cdot\partial_j F + \varphi\,\partial_i N\cdot\partial_j F \\ &= \varphi\,\partial_i\, N\cdot\partial_j F = -\varphi\, I\!I(\partial_i F, \partial_j F), \end{aligned}$$

die wir uns vorhin im Zusammenhang mit der Symmetrie der zweiten Fundamentalform überlegt haben (dabei: $\partial_1 := \partial_u$, $\partial_2 := \partial_v$). Dabei geht natürlich die Orthogonalitätsrelation

$$N\cdot\partial_j F = 0$$

ein. Man bekommt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\,\det g^\varepsilon = -2\,\varphi\,\Big[&|\partial_u F|^2\, I\!I(\partial_v F, \partial_v F) + |\partial_v F|^2\, I\!I(\partial_u F, \partial_u F) \\ &- 2\,\partial_u F\cdot\partial_v F\, I\!I(\partial_u F, \partial_v F)\Big]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die rechte Seite von (2.2) soll nun in Terme mit H umgeformt werden. Per Definition ist

$$H(p) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\; d\mathcal{N}_p = \frac{1}{2}\big(I\!I_p(\xi,\xi) + I\!I_p(\eta,\eta)\big),$$

wobei ξ, η eine beliebige Orthonormalbasis von T_pS repräsentieren. Eine solche können wir aus den Basisvektoren $\partial_u F$, $\partial_v F$ wie folgt erzeugen:

$$\begin{aligned}
\xi &:= \partial_u F/|\partial_u F|,\\
\tilde\eta &:= \partial_v F - \big(\partial_v F\cdot\xi\big)\xi,\\
\eta &:= \tilde\eta/|\tilde\eta|.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$|\tilde\eta|^2 = |\partial_v F|^2 - \big(\partial_v F\cdot\xi\big)^2 = |\partial_u F|^{-2}\,\det g,$$

und damit

$$\begin{aligned}
2H &= I\!I(\xi,\xi) + |\tilde\eta|^{-2} I\!I(\tilde\eta,\tilde\eta)\\
&= I\!I(\xi,\xi) + |\tilde\eta|^{-2} I\!I\Big(\partial_v F - \big(\partial_v F\cdot\xi\big)\,\xi, \partial_v F - \big(\partial_v F\cdot\xi\big)\,\xi\Big)\\
&= I\!I(\xi,\xi)\Big(1 + |\tilde\eta|^{-2}\big(\partial_v F\cdot\xi\big)^2\Big) + |\tilde\eta|^{-2} I\!I(\partial_v F,\partial_v F) - 2\,|\tilde\eta|^{-2}\,\partial_v F\cdot\xi\, I\!I(\partial_v F,\xi)\\
&= |\tilde\eta|^{-2}|\partial_v F|^2\, I\!I(\xi,\xi) + |\tilde\eta|^{-2}\, I\!I(\partial_v F,\partial_v F) - 2\,|\tilde\eta|^{-2}\,\partial_v F\cdot\xi\, I\!I(\partial_v F,\xi)\\
&= |\tilde\eta|^{-2}|\partial_u F|^{-2}\Big(|\partial_v F|^2\, I\!I(\partial_u F,\partial_u F) + |\partial_u F|^2\, I\!I(\partial_v F,\partial_v F)\\
&\qquad - 2\,(\partial_u F\cdot\partial_v F)\, I\!I(\partial_u F,\partial_v F)\Big).
\end{aligned}$$

Das liefert folgende Formel für die mittlere Krümmung:

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2\det g}\Big[&|\partial_u F|^2\, I\!I(\partial_v F,\partial_v F)\\
&- 2\,\partial_u F\cdot\partial_v F\, I\!I(\partial_u F,\partial_v F) + |\partial_v F|^2\, I\!I(\partial_u F,\partial_u F)\Big]
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Kombiniert man schließlich (2.2) und (2.3), so lautet die erste Variation des Flächeninhalts

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0}\,\mathrm{Area}(S^\varepsilon) = \int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{\det g}}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0}\,\det g^\varepsilon\,du\,dv = -2\int_\Omega \varphi H\,\sqrt{\det g}\,du\,dv.$$

Ist S eine Minimalfläche in dem Sinne, dass

$$\mathrm{Area}(S) \le \mathrm{Area}(S^\varepsilon)$$

für alle wie oben erzeugten Vergleichsflächen S^ε gilt, so folgt

$$\int_\Omega \varphi H\,\sqrt{\det g}\,du\,dv = 0$$

für beliebige Funktionen φ mit kompaktem Träger in Ω, und wir schließen wegen $\det g > 0$:

SATZ 2.4

> Sei $S = F(\Omega)$ eine über dem Gebiet Ω regulär parametrisierte Fläche. Wenn S unter allen über Ω parametrisierten Flächen S^* mit gleichem Rand den Flächeninhalt minimiert, so folgt:
>
> $$H \equiv 0.$$

BEMERKUNGEN

(1) Wie schon mehrfach gesagt, ist die mittlere Krümmung H ein nur für global orientierbare Flächen S im $\mathbb{R}^3$ sinnvoller Begriff und abhängig davon, für welche Orientierung man sich entscheidet, d. h. man muss stets ein globales Normalenfeld auf S auszeichnen, auf das man sich bei der Berechnung von H bezieht. Für lokal flächenminimierende Objekte ist das natürlich unerheblich: H verschwindet unabhängig von der fixierten Orientierung.

(2) Grundsätzlich kann man "Flächeninhalt" (als 2–dimensionales Hausdorff–Maß $\mathcal{H}^2$) auch für nicht orientierbare Flächen erklären. Für diese Objektklasse hat man ferner die vektorielle mittlere Krümmung $\mathbf{H}$, und die Aussage von Satz 2.4 lautet entsprechend:

> Ist S eine lokal minimale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$, so gilt $\mathbf{H} = 0$ bzw. $H = 0$, wenn man H bzgl. beliebiger lokaler Parametrisierungen bildet.

□

Zur Vertiefung der geometrischen Begriffe wollen wir die mittlere Krümmung für Graphen $S = G_f$ ausrechnen und damit auch die Verbindung zur Minimalflächengleichung aus Satz 1.1 herstellen. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und $S = G_f$ der zugehörige Graph. Als kanonische Parametrisierung bietet sich

$$F(u,v) := \big(u, v, f(u,v)\big)$$

an, mit dem Normalenfeld

$$\mathcal{N}\big(F(u,v)\big) = N(u,v) = \big(-\nabla f(u,v), 0\big)\Big/\sqrt{1 + \big|\nabla f(u,v)\big|^2}.$$

Dazu gehören die folgenden Größen:

$$\partial_u F = (1, 0, \partial_u f), \quad \partial_v F = (0, 1, \partial_v f), \quad \partial_u F \cdot \partial_v F = \partial_u f \partial_v f,$$
$$\det g = 1 + |\nabla f|^2,$$
$$I\!I(\partial_u F, \partial_u F) = -\partial_u F \cdot \partial_u N = \partial_u^2 f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$
$$I\!I(\partial_v F, \partial_v F) = -\partial_v F \cdot \partial_v N = \partial_v^2 f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$
$$I\!I(\partial_u F, \partial_v F) = -\partial_v F \cdot \partial_u N = \partial_u \partial_v f \Big/ \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

Aus (2.3) folgt:

$$H = \frac{1}{2}\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-3/2}\Big[\partial_u^2 f\big(1+(\partial_v f)^2\big) - 2\,\partial_u f\,\partial_v f\,\partial_u\partial_v f + \partial_v^2 f\big(1+(\partial_u f)^2\big)\Big].$$

Aus dieser Gleichung liest man ab:

> f ist Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung genau dann, wenn die mittlere Krümmung H von G_f identisch verschwindet.

Wir haben uns mit vorstehenden Überlegungen davon überzeugt, dass unser Ausgangsproblem "Finde Flächen kleinsten Inhalts" notwendig auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung führt, d. h. Minimalflächen im eigentlichen Sinn erfüllen insbesondere $H \equiv 0$. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir einige allgemeine Eigenschaften von regulär parametrisierten Flächen mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$; als Folgerung unserer Überlegungen charakterisieren wir mit funktionentheoretischen Argumenten gewisse Klassen solcher Flächen.