§ 5

Folgerungen aus der Struktur der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

In diesem Abschnitt studieren wir das Verhalten von C^2– (und damit reell analytischen) Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0 \tag{5.1}$$

auf Gebieten in $\mathbb{R}^2$. Es handelt sich bei (5.1) um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die man trotzdem eine Reihe, aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung, bekannten Sätze nachmachen kann. Dazu gehören insbesondere sog. **Maximum–Prinzipien**, wo man die Größenordnung der Lösung auf einem Gebiet Ω durch das Verhalten der Randwerte beschreibt. Für einen allgemeinen Zugang vergleiche man etwa das ausgezeichnete Buch [Gilbarg, Trudinger]. Andererseits impliziert gerade die Nichtlinearität von (5.1) eine Reihe verblüffender Aussagen: Neben dem Satz von Bernstein hat man ein Theorem über die Hebbarkeit isolierter Punkte, d. h. gilt (5.1) nur auf einem punktierten Bereich, so kann man f glatt über den möglichen singulären Punkt hinaus fortsetzen.

SATZ 5.1 (Maximum–Prinzip)

Seien $f,\, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lösungen der Minimalflächengleichung (5.1) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $f,\, g \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt

(i) $f \le g + M$ auf $\partial\Omega$ für ein $M \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f \le g + M$ auf Ω.

(ii) $m + f \le g$ auf $\partial\Omega$ für ein $m \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $m + f \le g$ auf Ω.

KOROLLAR

Das Dirichletproblem zur Minimalflächengleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hat — wenn überhaupt — nur eine Lösung, d. h.: Gibt man eine stetige Funktion $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ vor, so gibt es höchstens eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit (5.1) und $f|_{\partial\Omega} = \phi$ (Dirichlet–Randbedingung).

BEMERKUNG

Das Korollar sagt natürlich gar nichts darüber aus, ob man zu gegebener Randfunktion ϕ lösen kann. Diese Diskussion ist viel schwerer und wird später geführt.

BEWEISSKIZZE ZU SATZ 5.1

Wir beschreiben hier eine Vorgehensweise, nämlich die Wahl geeigneter Testfunktionen, die in der allgemeinen Theorie partieller Differentialgleichungen sehr geläufig ist.
Multipliziert man die Gleichung (5.1) für f und g mit einer glatten Funktion φ, die auf $\partial\Omega$ verschwindet, so folgt nach Integration über Ω und Anwendung des Satzes von Gauß nach Subtraktion der resultierenden Identitäten:

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) \cdot \nabla\varphi \, dx.$$

Ist $f \le g + M$ auf $\partial\Omega$, so wählt man

$$\varphi := \max(0, f - g - M).$$

Diese Funktion gehört zu $C^0(\overline{\Omega})$ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$, allerdings ist φ im Allgemeinen nur Lipschitz–stetig. Als Lipschitz–Funktion ist φ immerhin noch in fast allen Punkten von Ω differenzierbar mit

$$\nabla\varphi = (\nabla f - \nabla g) \cdot \chi_{[f>g+M]} \quad \text{f. ü. in } \Omega,$$

wobei $\chi_{[f>g+M]}$ die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \Omega : f(x) > g(x)+M\}$ bedeutet. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beweist man durch Einführen geeigneter Räume, dass φ tatsächlich in obiger Integralidentität zugelassen ist; es folgt:

$$0 = \int_{[f>g+M]} (\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) dx.$$

Andererseits ist für p, $q \in \mathbb{R}^2$ und mit $\phi(t) := q + t(p-q)$ für $t \in [0,1]$:

$$(p-q)\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}-\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\right) = (p-q)\cdot\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(\big(1+|\phi(t)|^2\big)^{-1/2}\phi(t)\Big)\,dt$$
$$= \int_0^1 \big(1+|\phi(t)|^2\big)^{-1/2}|p-q|^2 - \big(\phi(t)\cdot(p-q)\big)^2\big(1+|\phi(t)|^2\big)^{-3/2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \big(1+|\phi(t)|^2\big)^{-3/2}\Big[\big(1+|\phi(t)|^2\big)\,|p-q|^2 - \big(\phi(t)\cdot(p-q)\big)^2\Big]\,dt$$
$$\geq \int_0^1 \big(1+|\phi(t)|^2\big)^{-3/2}\,dt\;|p-q|^2.$$

Also ist der Integrand in $\int_{[f>g+M]}\cdots dx$ stets ≥ 0, und das Verschwinden des Integrals bedeutet demnach

$$(\nabla f-\nabla g)\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}-\frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right) = 0 \quad \text{f. ü. in } [f > g+M].$$

Die wiederum ist nach der vorstehenden Abschätzung gleichwertig mit

$$\nabla f = \nabla g \quad \text{f. ü. in } [f > g+M],$$

also $\nabla\varphi = 0$ f.ü. in $[f > g+M]$; φ hat Randwerte 0 auf $\partial\Omega$ und wie bei glatten Funktionen gilt auch hier die Folgerung $\varphi = 0$, also $f \leq g+M$ auf Ω. □

PRÄZISER BEWEIS ZU SATZ 5.1

Wir folgen dem "Vergleichssatz für quasilineare Gleichungen" aus [Gilbarg, Trudinger], Theorem 9.2. Sei Q der folgende Differentialoperator

$$Qu := \Delta u - \sum_{i,j}\big(1+|\nabla u|^2\big)^{-1}\partial_i u\,\partial_j u\,\partial_i\partial_j u.$$

Offenbar ist $Qu = 0$ gleichwertig mit der nichtparametrischen Minimalflächengleichung (5.1). Wir nehmen an:

$$u, v \in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega), \quad Qu \geq Qv \text{ auf } \Omega, \qquad u \leq v \text{ auf } \partial\Omega, \tag{5.2}$$

und wollen zeigen

$$u \leq v \text{ auf } \Omega. \tag{5.3}$$

Hieraus ergeben sich schnell (durch passende Wahlen von u, v) die Aussagen des vorstehenden Satzes.

Es ist nach (5.2)

$$\begin{aligned}
0 \le Q(u-v) &= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} \big(1+|\nabla u|^2\big)^{-1} \partial_i u\, \partial_j u\, \partial_i \partial_j u \\
&\quad + \sum_{i,j} \big(1+|\nabla v|^2\big)^{-1} \partial_i v\, \partial_j v\, \partial_i \partial_j v \\
&= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} \big(1+|\nabla u|^2\big)^{-1} \partial_i u\, \partial_j u\, \big(\partial_i \partial_j u - \partial_i \partial_j v\big) \\
&\quad + \sum_{i,j} \big(1+|\nabla v|^2\big)^{-1} \big(\partial_i v\, \partial_j v - \partial_i u\, \partial_j u\big)\, \partial_i \partial_j v \\
&= \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\right] \partial_i \partial_j (u-v) \\
&\quad + \sum_{i,j} \big(1+|\nabla v|^2\big)^{-1} \big(\partial_i v\, \partial_j v - \partial_i u\, \partial_j u\big)\, \partial_i \partial_j v,
\end{aligned}$$

mit den Notationen $a_{ij}(p) := \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}$ $(p \in \mathbb{R}^2)$ und $w = u - v$ also

$$0 \le \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\, \partial_i \partial_j w + \sum_{i,j} \big[a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\big]\, \partial_i \partial_j v.$$

Mit geeigneten stetigen Funktionen $\vartheta_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v) = \vartheta_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v), \tag{5.4}$$

denn für beliebige $p, q \in \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(p) - a_{ij}(q) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, a_{ij}\big(q + t(p-q)\big)\, dt = (p-q) \cdot \int_0^1 \nabla a_{ij}\big(q + t(p-q)\big)\, dt,$$

also gilt (5.4) mit der Wahl

$$\vartheta_{ij}(x) := \int_0^1 \nabla a_{ij}\Big(\nabla v(x) + t\big(\nabla u(x) - \nabla v(x)\big)\Big)\, dt.$$

Damit wird

$$\sum_{i,j} \big[a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\big]\, \partial_i \partial_j v = \sum_{i,j} \vartheta_{ij} \cdot \nabla w\, \partial_i \partial_j v = \sum_k \Big(\sum_{i,j} \vartheta_{ij}^k\, \partial_i \partial_j v\Big) \partial_k w.$$

Setzen wir noch

$$b_k(x) := \sum_{i,j} \vartheta_{ij}^k\, \partial_i \partial_j v,$$

so bekommen wir die Differentialungleichung

$$0 \le \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i \partial_j w + \sum_k b_k\, \partial_k w =: Lw. \tag{5.5}$$

Die Koeffizienten b_k sind per Definition lokal beschränkt, stetige Funktionen auf Ω, und gemäß (5.2) haben wir die Zusatzinformation $w \le 0$ auf $\partial\Omega$. Zum Nachweis der

Behauptung (5.3) nehmen wir indirekt an, dass w im Inneren von Ω einen positiven Wert annimmt; $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ bedeutet dann:

$$w(x_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} w(x) > 0,$$

für ein $x_0 \in \Omega$. Insbesondere ist dann $\nabla w(x_0) = 0$ und $D^2 w(x_0)$ negativ semidefinit, also $Lw(x_0) \leq 0$. Mithin bekommt man sofort einen Widerspruch, wenn man $Q(u) \geq Q(v)$ durch die stärkere Bedingung “>” ersetzt, was sich dann in $L(w) > 0$ niederschlägt.

Wie argumentiert man im allgemeinen Fall?

Sei $D \Subset \Omega$ ein beliebiges Teilgebiet. Sämtliche Koeffizienten des Differentialoperators L sind auf $\overline{D}$ stetig, also insbesondere auch beschränkt. (Für das Gebiet Ω ist das nicht klar, denn u, v liegen nur in $C^2(\Omega)$ und nicht in $C^2(\overline{\Omega})$.) Man findet jetzt $\lambda > 0, b_0 > 0$ mit

$$\lambda\, |p|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}\, p_i p_j \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbb{R}^2,\ x \in \overline{D},$$

$$\frac{1}{\lambda} \sup_{x \in \overline{D}} \big|b(x)\big| \leq b_0.$$

Mit $\gamma > 0$ folgt (bachte $a_{11} \geq \lambda$)

$$Le^{\gamma x_1} = \big(\gamma^2 a_{11} + \gamma\, b_1\big)\, e^{\gamma x_1} \geq \lambda\, \big(\gamma^2 - \gamma\, b_0\big) e^{\gamma x_1}$$

auf D, und wählt man γ genügend groß, so ist offenbar

$$Le^{\gamma x_1} > 0 \quad \text{auf } D.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ bekommt man

$$L\big(w + \varepsilon e^{\gamma x_1}\big) > 0 \quad \text{auf } D,$$

und daraus schließt man für $w_\varepsilon := w + \varepsilon e^{\gamma x_1}$:

$$\sup_{x \in \overline{D}} w_\varepsilon(x) = \sup_{x \in \partial D} w_\varepsilon(x).$$

Würde nämlich $\sup_{\overline{D}} w_\varepsilon$ in einem Punkt $x_0 \in D$ angenommen, so hätte man dort wie vorhin ja $Lw_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Mit $\varepsilon \downarrow 0$ impliziert das Randmaximumprinzip aber

$$\sup_{x \in \overline{D}} w(x) = \sup_{x \in \partial D} w.$$

Schließlich wählt man für D eine Ausschöpfung von Ω (also eine Folge $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_\nu \Subset \Omega$ mit $\bigcup_\nu D_\nu = \Omega$), die Stetigkeit von w bis zum Rand von Ω liefert:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} w = \sup_{x \in \partial\Omega} w \leq 0,$$

und genau das wahr zu zeigen. $\square$

BEMERKUNGEN

(1) Die vorstehenden Rechnungen haben nirgendwo ausgenutzt, dass wir die nichtparametrische Minimalflächengleichung in nur zwei Dimensionen betrachten. Unser Ergebnis gilt wörtlich für Lösungen $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\operatorname{div}\left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\right) = 0$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

(2) Ist der Definitionsbereich Ω unbeschränkt und/oder sind die Lösungen f, g der nichtparametrischen nicht stetig bis zum Rand $\partial\Omega$, so zeigt das Ausschöpfungsargument ($D \uparrow \Omega$) immerhin noch das folgende **Vergleichsprinzip**:

$$\liminf_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} \big(f(x) - g(x)\big) \leq f(y) - g(y) \leq \limsup_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} \big(f(x) - g(x)\big)$$

für alle $y \in \Omega$ Hier bedeutet $\Omega \ni x \to \partial\Omega$, dass man sich dem Rand von Ω beliebig annähert.

Der vorstehende Satz 5.1 zeigt, dass sich das aus der Theorie der linearen, elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung bekannte Maximumprinzip durchaus auf Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ausdehnen lässt. Die nachfolgende Überlegung macht deutlich, dass man im nichtlinearen Fall oft viel stärkere Aussagen treffen kann:

Ist $\Omega = D_R(x_0) \setminus \overline{D}_r(x_0)$ ein Kreisring ($R > r > 0$), so lassen sich auf $\partial D_R(x_0)$, $\partial D_r(x_0)$ beliebige stetige Funktionen $\phi : \partial D_R(x_0) \to \mathbb{R}$, $\varphi : \partial D_r(x_0) \to \mathbb{R}$ vorschreiben, zu denen man eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ des linearen Dirichlet–Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial D_R(x_0)} = \phi, \quad u|_{\partial D_r(x_0)} = \varphi \end{cases}$$

konstruieren kann. Bei Minimalflächen ist das völlig anders: Lässt sich die Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der äußeren Sphäre $\partial D_R(x_0)$ durch ein Katenoid kontrollieren, so gilt diese Abschätzung bereits auf dem ganzen Kreisring. Mit anderen Worten: Die Randwerte auf $\partial D_r(x_0)$ können insbesondere nicht mehr beliebig sein. (Die genaue Formulierung findet man in Satz 5.2.) Zur Vorbereitung reden wir kurz über

Das Katenoid:

Das Katenoid wird analytisch beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$$

bzw. in Graphenform

$$z \pm \operatorname{ar}\cosh \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus D_1(0)$$

Wählt man das Vorzeichen $+$, so heißt der Graph von $z = \operatorname{ar}\cosh\sqrt{x^2+y^2}$ **oberes Halbkatenoid**, sonst unteres Halbkatenoid (*Fig. 5.1*).

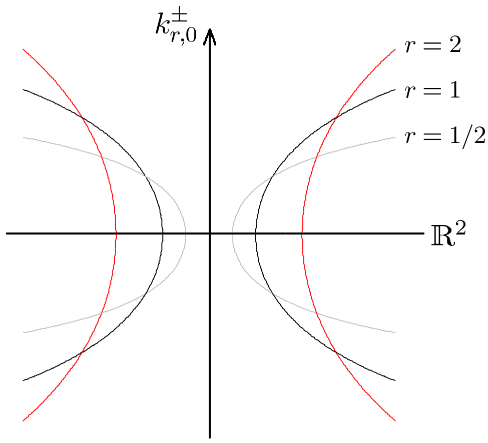

Fig. 5.1

Seien allgemeiner für $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}$

$$k^{\pm}_{r,a}(x,y) := \pm \operatorname{ar}\cosh\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\right) + a$$

und

$$K^{\pm}_{r,a} := G_{k^{\pm}_{r,a}}$$

mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus D_r(0)$. Wir schreiben kürzer $k^{\pm}_r$ bzw. $K^{\pm}_r$, wenn $a = 0$ ist. Die Graphen $K^{\pm}_{r,a}$ gehen durch Ähnlichkeitstransformationen aus dem oberen bzw. unteren Halbkatenoid hervor, die Konstante a bewirkt z. B. eine vertikale Verschiebung (vgl. *Fig. 5.1*), und $k^{\pm}_{r,a}$ lösen auf ihrem Definitionsbereich die nichtparametrische Minimalflächengleichung.

SATZ 5.2

Seien $0 < r < R$ gegeben und sei $D \subset D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi)$ ein Gebiet. Sei f eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf D. Gilt dann für ein $a \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{x \to x_0} \left[f(x) - k^{-}_{r,a}(x)\right] \leq 0$$

für alle Randpunkte $x_0 \in \partial D \setminus \partial D_r(\xi)$, so ist

$$f(x) \leq k^{-}_{r,a}(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D$$

(vgl. dazu *Fig. 5.2*).

BEMERKUNG

Der Spezialfall $D = D_R(\xi)\setminus\overline{D}_r(\xi)$ verdient besondere Beachtung: Weiß man $f \leq k^-$ auf dem Rand der äußeren Kreisscheibe, so gilt $f \leq k^-$ auf dem ganzen Ring. Daraus bekommt man den

Einschließungssatz für Minimalflächen:
Ist $f : D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung, und bezeichnet $k^{\pm}$ das auf $\mathbb{R}^2 \setminus D_r(\xi)$ definierte obere bzw. untere Halbkatenoid, mit

$$k^+ \leq f \leq k^- \quad \text{auf } \partial D_R(\xi),$$

so hat man $k^+ \leq f \leq k^-$ auf $D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi)$ (vgl. *Fig. 5.2*).

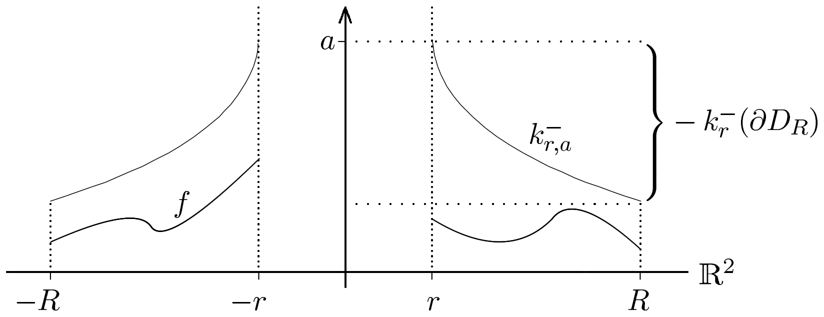

Fig. 5.2

BEWEIS VON SATZ 5.2

Ohne Einschränkung sei $r := 1$, $a := 0$ und $D := D_R(0) - \overline{D}_1(0)$. Für $1 < r < R$ sei

$$\varepsilon := \sup_{r \leq |x| \leq R} \left| k^-(x) - k^-_r(x) \right|,$$

wobei $k^- := k^-_1$ ist. Ferner nehmen wir an, dass f auf $\overline{D}$ stetig ist und $f \leq k^-$ auf $D_R(0)$ erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: f ist stetig differenzierbar auf $\overline{D}$. Dann können wir direkt argumentieren und brauchen das Hilfskatenoid nicht einzuführen. Gilt sogar $f \leq k^-$ auf $\partial D_1(0)$, so ist die globale Aussage direkte Folge aus dem Maximum–Prinzip (Satz 5.1). Ist $f > k^-$ irgendwo auf $\partial D_1(0)$, so wählt man ein $x_0 \in \partial D_1(0)$ mit

$$0 < f(x_0) - k^-(x_0) =: M = \max_{x \in \partial D_1(0)} f(x) - k^-(x),$$

und Satz 5.1 impliziert $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf dem ganzen Ring D.
Für z mit $|z| > 1$ ist

$$\nabla k^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{|z|^2 - 1}}\, z,$$

also gilt für

$$\Phi(t) := f(tx_0) - k^-(tx_0), \quad t > 1,$$

(beachte: $tx_0 \in D$ für $t \in (1, R)$) offenbar

$$\Phi'(t) = x_0 \cdot \nabla f(tx_0) + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0,$$

denn ∇f ist nach Voraussetzung ja beschränkt. Mithin ist Φ streng wachsend und

$$\Phi(t) > M \quad \text{für } t > 1,$$

was aber $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf D widerspricht.

Fall 2: f ist nicht notwendig C^1 auf $\overline{D}$. Dann gilt:

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial D_R(0).$$

Sei $D^r := D_R(0) \setminus \overline{D}_r(0)$. Im Fall

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_r(0)$$

liefert Satz 5.1

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } D^r. \tag{5.6}$$

Im anderen Fall existiert ein $x_0 \in \partial D_r(0)$ mit

$$rm := f(x_0) - k_r^-(x_0) = \max_{x \in \partial D_r(0)} f(x) - k_r^-(x) > \varepsilon$$

und Satz 5.1 ergibt

$$f - k_r^- \leq m \quad \text{auf } D^r. \tag{5.7}$$

Gemäß $r > 1$ ist $\nabla f(x_0)$ beschränkt (x_0 ist innerer Punkt von D), und durch Betrachten des Gradienten von k_r^- sieht man (wie vorhin):

$$f(x) - k_r^-(x) > f(x_0) - k_r^-(x_0)$$

für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 in D^r, was (5.7) widerspricht. Die Annahme war also falsch, und es folgt (5.6). Lässt man r von oben gegen 1 gehen, so liefert (5.6) sofort $f \leq k^-$ auf D, denn die Katenoide konvergieren gleichmäßig gegeneinander. Die allgemeine Aussage von Satz 5.2 folgt durch ähnliche Betrachtungen.

□

Wir kommen jetzt zum Satz von Bers (1951) (vgl. [Nitsche], S. 549 oder [Osserman], Thm. 10.2) über die Hebbarkeit isolierter Singularitäten, der sich völlig aus der linearen Theorie heraushebt: Ist D' eine Kreisscheibe um 0, aus der der Ursprung herausgenommen wurde und

$$u : D' \to \mathbb{R}$$

eine C^2–Lösung der linearen Gleichung $\Delta u = 0$ auf D', so lässt sich die Singularität bei 0 i.a. nicht heben, d. h. ohne weitere Voraussetzungen ist es i. a. nicht möglich, u als glatte Lösung in den Ursprung hinein fortzusetzen. Dies zeigt das Beispiel der Funktion

$$u(x, y) := \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Als Vorbereitung für den Satz von Bers beweisen wir zunächst die Beschränktheit von nichtparametrischen Minimalflächen an isolierten Singularitäten.

SATZ 5.3

Sei f eine C^2–Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe

$$\dot{D}_R(0) := D_R(0) \setminus \{0\},$$

außerdem sei f stetig auf $\overline{D}_R(0) \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\sup_{x \in \dot{D}_R(0)} f(x) \leq \sup_{x \in \partial D_R(0)} f(x),$$

$$\inf_{x \in \dot{D}_R(0)} f(x) \geq \inf_{x \in \partial D_R(0)} f(x).$$

BEMERKUNG

Im vorstehnden Satz kennt man das Randverhalten von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bis auf einen möglichen Punkt aus $\partial\Omega$. Trotzdem gilt das bekannte Randmaximumprinzip. Allgemeiner kann man $f \in C^2(\Omega)$ diskutieren, wo endlich viele Ausnahmepunkte $p_1, \ldots, p_m \in \partial\Omega$ zugelassen sind. Dann bekommt man immerhin noch

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \limsup_{\Omega \ni x \to \partial\Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}} f(x),$$

und eine entsprechend Ungleichung für das Infimum.

Die übliche Anwendung sieht so aus: Ω ist ein ebenes Gebiet, das aus einem anderen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ durch Entfernen endlich vieler innerer Punkte $p_1, \ldots, p_m \in D$ entsteht, also

$$\Omega = D \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}, \quad \partial\Omega = \partial D \cup \{p_1, \ldots, p_m\}.$$

Ist f dann z. B. aus $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial D)$, so folgt

$$\limsup_{\Omega \ni x \to \partial\Omega \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}} f(x) = \sup_{x \in \partial D} f(x),$$

mithin

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \sup_{x \in \partial D} f(x),$$

so dass f bei Annäherung an die singulären Stellen $p_1, \ldots, p_m$ beschränkt bleibt. (Nach Bers sind die Singularitäten sogar hebbar.) “Singuläre Strecken” ℓ sind verboten: Entsteht Ω aus D durch Entfernenn einer eindimensionalen Menge, so ist das o. g. Maximum–Prinzip i. a. verletzt. $\square$

BEWEIS VON SATZ 5.3

Für $0 < r \leq R$ sei

$$M(r) := \sup_{x \in \partial D_r(0)} f(x).$$

In Abhängigkeit von r sei $a = a(r)$ so gewählt, dass

$$g_r := k^-_{r,a} = M(R) \quad \text{auf } \partial D_R(0)$$

erfüllt ist (vgl. *Fig. 5.2*), d. h. es ist (wähle $a := -k^-_r\big(\partial D_R(0)\big) + M(R)$)

$$g_r(x) = r\left[-\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{|x|}{r}\right) + \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{R}{r}\right)\right] + M(R) \quad \text{für alle} \quad |x| \geq r.$$

Aus $f \leq g_r$ auf $\partial D_R(0)$ bekommt man mit Satz 5.2:

$$f \leq g_r \quad \text{auf } D_R(0) \setminus D_r(0).$$

Ist nun $x \in \dot{D}_R(0)$ beliebig, so gilt vorstehende Ungleichung insbesondere für alle $r < |x|$, unter Ausnutzung von

$$g_r(x) \xrightarrow{\rho \downarrow 0} M(R)$$

bekommt man schließlich $f(x) \leq M(R)$. □

SATZ 5.4 (Satz von Bers)

Sei $f : \dot{D}_R(0) \to \mathbb{R}$ eine C^2–Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe $\dot{D}_R(0)$. Dann lässt sich f glatt in den Ursprung hinein fortsetzen und löst die Minimalflächengleichung auf der ganzen Kreisscheibe $D_R(0)$.

BEWEIS

Wir benutzen hier einen Existenzsatz für das Dirichlet–Problem auf Kreisscheiben bei C^2–Randwerten für die nichtparametrische Minimalflächengleichung. Dazu sei f o. E. als C^2–Funktion in der Nähe von $\partial D_R(0)$ vorausgesetzt (ggf. verkleinere man einfach den Radius). Aus Satz 5.3 folgt

$$\sup_{x \in \dot{D}_R(0)} \big|f(x)\big| \leq \sup_{x \in \partial D_R(0)} \big|f(x)\big|,$$

also Beschränktheit von f. Sei $\tilde{f} \in C^2\big(\overline{D}_R(0)\big)$ nun die C^2–Lösung der Minimalflächengleichung mit

$$\tilde{f}|_{\partial D_R(0)} = f|_{\partial D_R(0)}.$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon \in (0,R)$

$$\begin{aligned}
&\int_{D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)} (\nabla f - \nabla\tilde{f}\,)\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right) dx \\
&= \int_{D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)} \operatorname{div}\left((f-\tilde{f}\,)\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right)\right) dx \\
&= \int_{D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)} (f-\tilde{f}\,)\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right) dx \\
&= \int_{\partial\left(D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)\right)} (f-\tilde{f}\,)\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right)\cdot\nu\, d\mathcal{H}^1,
\end{aligned}$$

wobei wir die Minimalflächengleichung und den Satz von Gauß ausgenutzt haben (ν bezeichnet dabei die äußere Normale an $\partial\big(D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)\big) = \partial D_R(0)\cup\partial D_\varepsilon(0)$).
Das Integral über $\partial D_R(0)$ verschwindet offenbar nach Wahl von $\tilde{f}$. Auf $\partial D_\varepsilon(0)$ benutzt man die Beschränktheit des Integranden (f und $\tilde{f}$ sind ja beschränkt und es ist $|\nabla f|/\sqrt{1+|\nabla f|^2}\le 1$, etc.). Es folgt:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{D_R(0)\setminus D_\varepsilon(0)} (\nabla f - \nabla\tilde{f}\,)\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right) dx = 0.$$

Wie wir uns früher aber schon überlegt haben, ist der Integrand stets ≥ 0 und verschwindet nur, wenn $\nabla f = \nabla\tilde{f}$ im betreffenden Punkt gilt. Speziell ist nun

$$\int_{\dot{D}_R(0)} (\nabla f - \nabla\tilde{f}\,)\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla\tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla\tilde{f}|^2}}\right) dx = 0,$$

mithin

$$\nabla f = \nabla\tilde{f} \quad \text{auf } \dot{D}_R(0),$$

also $f-\tilde{f} = const$ auf $\dot{D}_R(0)$. Da aber $f-\tilde{f}$ auf $\partial D_R(0)$ verschwindet, muss $\tilde{f} = f$ bis auf den Ursprung sein, so dass man f durch $f(0) := \tilde{f}(0)$ wie gewünscht glatt fortsetzen kann. □

Für weitere Informationen über Hebbarkeitssätze vergleiche man die Bemerkungen in [Osserman] auf S. 98.