Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung "Maße in der Theorie partieller Differentialgleichungen"
WS 2014/2015, Blatt 1 (11 Punkte)

Abgabe: 06.11.2014 vor der Vorlesung. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Sei $|I|$ die Länge des Intervalls I, wobei $I = [a, b]$, (a, b), $[a, b)$, oder $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren das (äußere) Lebesgue-Maß $\mathcal{L}$ einer belibigen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{L}(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ sind Intervalle} \right\}.$$

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen richtig sind:

a) $\mathcal{L}(I) = |I|$ fur alle Intervalle I,

b) $\mathcal{L}$ ist ein Maß (bezüglich Def.1.1. der Vorlesung),

c) $\mathcal{L}$ ist ein Borel-Maß,

d) $\mathcal{L}$ ist ein Borel regulär Maß,

e) $\mathcal{L}$ ist ein Radon-Maß.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind, und ermitteln Sie das Lebesgue–Maß dieser Mengen:

a) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$,

b) $\cup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{2^n}\right]$,

c) Die Cantor-Menge $\mathcal{C}$,

d) Die Menge aller Punkte aus $[0, 1]$, die eine Dezimalentwicklung ohne die Zahl 5 haben.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Mächtigkeit der Cantor-Menge $\mathcal{C}$ mit der Mächtigkeit des Intervalls $[0, 1]$ übereinstimmt.

b) Zeigen Sie, dass alle Lebesgue-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit $2^{\mathcal{C}}$ haben.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/