Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung "Maße in der Theorie partieller Differentialgleichungen"
WS 2014/2015, Blatt 2 (12 Punkte)

Abgabe: 20.11.2014 vor der Vorlesung. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Zum Beweis von Lemma 1.17: Seien μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$, B eine Borelmenge mit $\mu(B) < \infty$, $\nu = \mu\lfloor B$ sowie

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}^n \,:\, A\, \mu\text{-messbar}, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, C \subset A \text{ mit } \nu(A \setminus C) < \varepsilon\,,\, C \text{ abgeschlossen}\}$$

und $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \,:\, \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{F}\}$. Zeigen Sie:

a) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, so folgt $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

b) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, so folgt $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

c) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, so folgt $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei $\mathcal{H}^s$, $s \geq 0$, das s-dimensionale Hausdorff-Maß. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß.

b) $\mathcal{H}^s(x + A) = \mathcal{H}^s(A)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

c) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ für alle $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

d) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$, falls $s > n$.

Aufgabe 6. (2 Punkte)
Seien (wie in Bemerkung 2.9) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq \delta^2/4\}$.
Zeigen Sie:

$$\mathcal{H}^s_\delta(S) = \mathcal{H}^s_\delta(S \cap A) = \mathcal{H}^s_\delta(S \setminus A) = \delta.$$

Aufgabe 7. (3 Punkte)
Zeigen Sie: $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}^1$, wobei $\mathcal{L}^1$ das eindimensionale Lebesgue-Maß ist.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/