Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung "Maße in der Theorie partieller Differentialgleichungen"
WS 2014/2015, Blatt 3 (11 Punkte)

Abgabe: 04.12.2014 vor der Vorlesung. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Finden Sie die Hausdorff-Dimension von Mengen

a) $\mathbb{Q}$, b) $[0,1]$, c) $\{(x,x^2) \,:\, x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Finden Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{diam} A = \delta$, die kann man nicht mittels einer abgeschlossenen Kugel von Durchmesser δ überdecken.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le s < \infty$. Beweisen Sie:

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le (\operatorname{Lip}(f))^s \, \mathcal{H}^s(A).$$

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Zu Lemma 4.2. Sei $\alpha \in (0,+\infty)$ fest. Seien μ und ν Radon-Maßen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

Falls $A \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \overline{D}_\mu \nu(x) \ge \alpha\right\}$, so folgt $\nu(A) \ge \alpha\mu(A)$.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $y_k \to x$, $k \to +\infty$. Setze $f_k := 1_{\overline{B}_r(y_k)}$, $f := 1_{\overline{B}_r(x)}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{k\to\infty} f_k \le f \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n.$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/