Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung "Maße in der Theorie partieller Differentialgleichungen" WS 2014/2015, Blatt 4 (11 Punkte)

Abgabe: 18.12.2014 vor der Vorlesung. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Wir definieren das an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ konzentrierte Dirac–Maß δ_a durch

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A, \end{cases} \qquad \text{für alle Teilmengen} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

a) Zeigen Sie, dass δ_a ein Radon-Maß ist.

b) Bestimmen Sie die Zerlegung von δ_a bzgl. des Lebesgue-Maßes $\mathcal{L}^n$ in den absolut stetigen und den singulären Anteil (vgl. Satz 4.8).

c) Finden Sie die Dichte von δ_a bzgl. $\mathcal{L}^n$.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ eine monoton nichtfallende Funktion. Wir definieren das Lebesgue–Stieltjes Maß μ_F eines Intervalles $]a, b[\subset \mathbb{R}$ durch $\mu_F(]a, b[) := F(b) - F(a)$. Wir setzen:

$$\mu_F(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ sind Intervalle} \right\}, \quad \forall\ A \subset \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass μ_F ein Radon-Maß ist.

b) Bestimmen Sie die Zerlegung von μ_F bzgl. des Lebesgue-Maßes $\mathcal{L}^n$ in den absolut stetigen und den singulären Anteil (vgl. Satz 4.8).

c) Finden Sie die Dichte von μ_F bzgl. $\mathcal{L}^n$.

Aufgabe 15. (3 Punkte)

Sei f durch die Formel $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ gegeben. Finden Sie alle Lebesgue-Punkte und den präzisen Vertreter für die Funktion f.

Aufgabe 16. (2 Punkte)

Zu Satz 6.3: Es seien μ, μ_k, $k \in \mathbb{N}$, Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gelte $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_k = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu$. Zeigen Sie, dass für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K).$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/