Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung "Maße in der Theorie partieller Differentialgleichungen"
WS 2014/2015, Blatt 5 (12 Punkte)

Abgabe: 15.01.2015 vor der Vorlesung. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Aufgabe 17. (2 Punkte)

Finden Sie heraus, ob die Folge von Radon-Maßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist. Falls ja, bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.

(a) $\mu_k := \mu_{F_k}$, wobei $F_k(x) = \arctan(x-k)$ (vgl. Aufg. 14).

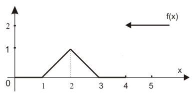
(b) $\mu_k := \delta_k$, wobei δ_k das an der Stelle k konzentrierte Dirac-Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 18. (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Variation auf Ω für folgende Funktionen:

(a) $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

(b) $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f(x) = |x|$.

(c) $\Omega = \mathbb{R}$, 

Aufgabe 19. (3 Punkte)

Seien $f,g \in L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Variation:

(a) Falls $\|Df\|(\Omega) = 0$, so folgt $f = 0 \in L^1(\Omega)$.

(b) $\|D(\alpha f)\|(\Omega) = |\alpha| \|Df\|(\Omega)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\|D(f+g)\|(\Omega) \leq \|Df\|(\Omega) + \|Dg\|(\Omega)$.

Aufgabe 20. (4 Punkte)

Seien E, G Caccioppoli-Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, Ω, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Perimeters:

(a) Falls $\Omega \subset U$, so folgt $P(E,\Omega) \leq P(E,U)$.

(b) $P(E \cup G, \Omega) \leq P(E,\Omega) + P(G,\Omega)$.

(c) Falls $\mathcal{L}^n(E) = 0$, so folgt $P(E) = 0$.

Insbesondere: Falls $\mathcal{L}^n(E \Delta G) = 0$, so folgt $P(E) = P(G)$.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/