Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 1

13. Oktober 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.1 Mengen

Definition 1.

Unter eine Menge M versteht man eine Gesamtkeit von unterschiedlichen „Dingen“ m unserer Erfahrung oder unserer Denkens, die häufig durch eine oder mehrere gemeinsame Eigenshaften charakterisiert werden.

Die „Dinge“ m heißen Elemente von M.

Beschreibung von Mengen:

- Aufzählung (bei endlichen Mengen).
- angedeutete Aufzählung.
- Charakterisierung durch gemeinsame Eigenshaft.

Definition 2.

Mengen, mit denen wir es häufig zu tun haben werden, sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *- die Menge der* ***natürlichen Zahlen,***
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *- die Menge der* ***ganzen Zahlen,***
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z};\ q \neq 0 \right\}$ *- die Menge der* ***rationalen Zahlen,***

Definition 2 (Fortsetzung).

- $\mathbb{R} = \left\{ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \;\middle|\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ ist eine konvergente Folge aus } \mathbb{Q} \right\}$ *- die Menge der* ***reellen Zahlen,***
- $\mathbb{C} = \left\{ a + ib \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$ *- die Menge der* ***komplexen Zahlen,***
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ *- die Menge der* ***natürlichen Zahlen und*** 0.

Bemerkung.

Achtung!

Es gibt auch Literatur, in der die Definitionen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ genau vertauscht verwendet werden, oder 0 als natürliche Zahl betrachtet wird.

In dieser Vorlesung ist 0 **keine** natürliche Zahl.

Definition 3.

Für reelle Zahlen a, b mit $a < b$ betrachtet man

- *das **abgeschlossene Intervall***

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} ;$$

- *die **offenen Intervalle***

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} ,$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} ,$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} ;$$

Definition 3. (Fortsetzung)

- *und die **halboffenen Intervalle***

$$
\begin{aligned}
[a, b) &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x < b\right\}, \\
(a, b] &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leqslant b\right\}, \\
[a, +\infty) &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x\right\}, \\
(-\infty, b] &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leqslant b\right\}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung.

Achtung!

In der Literatur wird für den offenen Intervall (a, b) auch oft die Schreibweise $]a, b[$ verwendet.

§1.2 Mengenvergleich und Mengenoperationen

Zwischen Mengen sind verschiedene Relationen und Operationen erklärt, die formal an Relationen oder Operationen zwischen Zahlen wie Addition, Differenz und Multiplikation erinnern, sich von diesen aber in wesentlichen Merkmalen unterscheiden.

Definition 4.

Es seien A, B irgendwelche Mengen.

*A ist **Teilmenge** oder **Untermenge** von B dann, und nur dann wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.*

Man schreibt: $A \subset B$.

Offenbar gilt dann für jede Menge M

$$M \subset M \qquad \text{und} \qquad \emptyset \subset M.$$

Definition 5.

Es seien A, B irgendwelche Mengen.

*Dann definiert man **die Gleichheit**:*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{jedes Element von } A \text{ auch ein Element von } B \text{ ist,} \\ \text{und} \\ \text{jedes Element von } B \text{ auch ein Element von } A \text{ ist.} \end{array}$$

Es gilt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \text{und} \quad B \subset A.$$

Definition 6.

*Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als die **Vereinigung** $A \cup B$ die Menge der Elemente, die in A oder in B (oder in Beiden) enthalten sind.*

$$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B \right\}.$$

Bemerkung.

$$A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B.$$

Definition 7.

Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als den ***Durchschnitt*** $A \cap B$ *die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.*

$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \quad \text{und} \quad x \in B \right\}.$$

Bemerkung.

$$A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B.$$

Im Fall $A \cap B = \emptyset$ nennt man A und B **disjunkt** oder **punktfremd**.

Definition 8.

*Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als die **Differenz** $A \setminus B$ die Menge der Elemente, die zwar in A, aber nicht in B enthalten sind.*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{und} \quad x \notin B\}.$$

Bemerkung.

$$A \setminus B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B.$$