Mathematatik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 10

20. November 2009

Kapitel 2. Konvergenz von Folgen und Reihen

§2.2 Reichen (Fortsetzung)

Satz 10.

Ist die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergent, so ist* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Bemerkung

Aus dem Satz folgt sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium dafür ist, dass die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert, und somit die Reihe divergiert, wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

Definition 37.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Aber nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{Absolute Konvergenz} & \Rightarrow & \text{Konvergenz} \\ \text{Konvergenz} & \not\Rightarrow & \text{Absolute Konvergenz} \end{array}}$$

§2.3 Konvergenzkriterien

Satz 11. (Konvergenzkriterium von Leibniz)

Es seien positive reelle Zahlen $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots$ *gegeben, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann konvergieren die Reihen

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n}_{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots} \quad \textit{und} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n}_{-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + \dots} .$$

Satz 12. (Quotientenkriterium)

Es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und q reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

- *Ist $q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ absolut konvergent.*
- *Ist $q > 1$, so ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ divergent.*
- *Ist $q = 1$, so ist keine Aussage möglich.*

Satz 13. (Wurzelkriterium)

Es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und q reelle Zahlen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

- *Ist $q < 1$, so ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ absolut konvergent.*
- *Ist $q > 1$, so ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ divergent.*
- *Ist $q = 1$, so ist keine Aussage möglich.*

Eine weitere häufig verwendete Methode zur Bestimmung der Konvergenz einer Reihe beruht auf einem **Vergleich** der gegebenen Reihe mit einer zweiten Reihe, deren Konvergenzeigenschaften bekannt sind.

Diese Methode nennt man **Majorantenmethode**.

Satz 14. (Majorantenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sei absolut konvergent.*

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine Reihe, so dass*

$$|b_k| \leqslant |a_k| \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent.*

Satz 14. (Minorantenkriterium)

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \geqslant 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei divergent.*

Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *eine Reihe, so dass*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *divergent.*