Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 11

24. November 2009

Kapitel 2. Konvergenz von Folgen und Reihen

§2.3 Konvergenzkriterien (Fortsetzung)

Satz 16. (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist konvergent*

$$\Leftrightarrow$$

zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt mit*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0$ *und alle* $p \in \mathbb{N}$.

Kapitel 3. Differenzialrechnung einer Variablen

§3.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 38.

Es sei $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$, $\quad I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,*

ξ *ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von* I ($\xi = \pm\infty$ *möglich!!!),*

und $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D = \{x \in I : \ x \neq \xi\}$, *so dass für jede Folge* $\{x_n\}$ *in* D *mit* $x_n \to \xi$ *gilt*

$$f(x_n) \to A.$$

Dann nennt man A *den Grenzwert von* $f(x)$ *für* x *gegen* ξ.

Schreibweise:

$$f(x) \to A \quad \text{bei} \quad x \to \xi$$

oder

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A.$$

Definition 39.

Man sagt, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *nicht existiert*

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \textit{nicht gilt},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \textit{nicht gilt},$$

und es keine Zahl $A \in \mathbb{R}$ *gibt mit* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Satz 17.

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in \mathbb{R}$ ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von I;

$D := \{x \in I : \ x \neq \xi\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

Genau dann ist

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ein } \delta > 0 \text{ gibt,} \\ \text{so dass gilt:} \\ x \in D \text{ und } |x - \xi| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \end{array}$$

§3.2 Stetigkeit

Definition 40.

Es sei M eine nichtleeere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Für $x_0 \in M$ die Funktion f ist stetig in x_0 wenn für alle Folgen $\{x_n\}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

- *Die Funktion f ist dann, und nur dann, stetig, wenn für alle $x_0 \in M$ die Funktion f stetig in x_0 ist.*

Definition 40 (Fortsetzung)

- *Für $x_0 \in M$ sagt man, dass f unstetig in x_0 ist, dann, und nur dann, wenn es mindestens eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ gibt.*

Bemerkung.

Dass f stetig in x_0 ist bedeutet:

Ist x nahe bei x_0, so liegt $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$.

Satz 18.

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in M$, so dass es $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, $x_0 \in [a, b]$ und $(a, b) \subset M$ gilt.

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert und ist gleich } f(x_0).$$

Definition 41.

Man nennt $\xi \in (a, b)$ eine Sprungstelle der Funktion $f : (a, b) \setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}$, wenn die einseitigen Grenzwerte $f(\xi^-)$, $f(\xi^+) \in \mathbb{R}$ existieren:

$$f(\xi^-) := \lim_{x \to \xi,\ x \in (a,\xi)} f(x),$$
$$f(\xi^+) := \lim_{x \to \xi,\ x \in (\xi,b)} f(x)$$

aber verschieden sind: $f(\xi^-) \neq f(\xi^+)$.