Mathematatik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 12

1. Dezember 2009

Kapitel 3. Differenzialrechnung einer Variablen

§3.2 Stetigkeit (Fortsetzung)

Satz 19.

Es seien M und N zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, $f : M \to N$ und $g : N \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann ist

$$g \circ f : M \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion.

Satz 20.

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $g, f : M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, und $r \in \mathbb{R}$.

- *Die Funktionen*

  $$r \cdot f, \qquad f \pm g, \qquad f \cdot g$$

  sind stetig.
- *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig.*

Satz 21.

Seien $a < b$ *reelle Zahlen und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion.*

- *Die Funktion* f *sit beschränkt, d.h. es gibt ein* $R \geqslant 0$*, so dass für alle* $x \in [a, b]$ *gilt*

$$|f(x)| \leqslant R.$$

- (Satz von Weierstraß) *Die Funktion nimmt in dem Intervall* $[a, b]$ *ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. es gibt* $m', M' \in [a, b]$ *so dass für alle* $x \in [a, b]$ *gilt*

$$f(m') \leqslant f(x) \leqslant f(M').$$

Satz 21 (Fortsetzung).

- (Zwischenwertsatz von Bolzano)
  Die Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im betrachteten Intervall mindestens einmal an,

  d.h. liegt y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es mindestens ein x_0 mit $f(x_0) = y_0$.

Bemerkung.

Betrachtet man nicht den abgeschlossenen Intervall,

sondern einen offenen oder einen halboffenen Intervall,

oder einen Intervall mit einer Lücke,

dann sind die obigen Aussagen in Allgemeinen falsch.

§3.3 Differenzierbarkeit

Zur Untersuchung des Verhaltens einer reellwertigen Funktion

$$y = f(x)$$

dient die Ableitung $f'(x)$, die ein Maß für die relative Änderung Δy bei kleinen Änderungen Δx der unabhängigen Variablen x ist.

Dabei betrachtet man einen festen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und definiert Δx durch

$$\Delta x = x - x_0$$

und Δy durch

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

„Relativ" bedeutet dabei soviel wie „im Verhältnis zu Δx", d.h. man interessiert sich für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Der Differenzquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist eine von x and Δx abhängende Größe.

Die Abhängigkeit von Δx stört, denn man möchte nur das ausgeblickliche Verhalten von $f(x)$ wissen. Daher betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Definition 42.

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Funktion f heißt differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in M$

$$\Leftrightarrow$$

der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und eine reelle Zahl ist.

Diese Zahl ist der Differenzialquotient, hängt i.A. von x_0 ab, und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, gelesen als Ableitung vn f an der Stelle x_0.

Definition 43.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Funktion f heißt differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M$ differenzierbar ist: Dann ist die Abbildung, die jedes Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ auf $f'(x_0)$ abbildet eine neue Funktion die Ableitung

$$f' : M \to \mathbb{R}$$

von f.

Bemerkung.

Oft wird die Ableitung auch mit

$$\frac{df(x)}{dx}$$

bezeichnet, oder oft auch mit einem Punkt

$$\dot{f}(x).$$

Letztere Notation wird typischerweise dann verwendet, wenn die Variable die Zeit ist.

Definition 44.

Man nennt f stetig differenzierbar

$$\Leftrightarrow$$

f differenzierbar ist und die Ableitung f' eine stetige Funktion auf M ist.

Satz 22.

Es seien M, N zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, $f : M \to N$ und $g : N \to \mathbb{R}$ zwei differenzienbare (bzw. stetig differenzierbare) Funktionen.

Dann ist $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare (bzw. stetig differenzierbare) Funktion. Es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (\textit{Kettenregel}).$$

Satz 23.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $r \in \mathbb{R}$ und $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare (bzw. stetig differenzierbare) Funktionen.

- *Die Funktionen $r \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ sind differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar). Es gelten:*

$$\begin{aligned} (r \cdot f)'(x) &= r \cdot f'(x), \\ (f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x), \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \text{(Produktregel).} \end{aligned}$$

Satz 23 (Fortsetzung)

- *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar)*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad \textit{(Quotientenregel).}$$