Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 13

7. Dezember 2009

Kapitel 3. Differenzialrechnung einer Variablen

§3.3 Differenzierbarkeit (Fortsetzung)

Satz 24.

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} & \Rightarrow & f'(x) = nx^{n-1} \\
f(x) = \ln x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) = \sin x & \Rightarrow & f'(x) = \cos x \\
f(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(x) = -\sin x \\
f(x) = e^x & \Rightarrow & f'(x) = e^x \\
f(x) = \arcsin x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) = \arccos x & \Rightarrow & f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) = \tan x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\
f(x) = \arctan x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.
\end{array}
$$

Bemerkung.

Die Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$ sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, aber in -1 uns 1 nicht differenzierbar, die Ableitung existiert also nur auf $(-1, 1)$.

Satz 25 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Umkehrfunktion $F = f^{-1}$.

Ist dann $\xi \in M$ mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist F differnzierbar in $\eta = f(\xi)$ und hat die Ableitung

$$F'(\eta) = F'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(F(\eta))}.$$

Definition 45.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- $\boxed{f \text{ ist } 1\text{-mal differenzierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist differenzierbar.}}$

  Dann nennt man f' auch die erste Ableitung von f, auch geschrieben als $f^{(1)}$.

Definition 45 (Fortsetzung)

- *f ist 2-mal differenzierbar* $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist differenzierbar.} \\ f' \text{ ist differenzierbar.} \end{cases}$

In diesem Fall ist die zweite Ableitung

$$f'' : M \to \mathbb{R} \qquad \text{von} \quad f$$

definiert durch

$$f'' := (f')',$$

ist also gerade die Ableitung $(f')'$ von f'. Die zweite Ableitung schreibt man auch als $f^{(2)}$ oder $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Definition 45 (Fortsetzung)

- $$\boxed{f \text{ ist } 3\text{-mal differenzierbar} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \text{ ist } 2\text{-mal differenzierbar.} \\ f'' \text{ ist differenzierbar.} \end{cases}}$$

  In diesem Fall ist die dritte Ableitung

  $$f''' : M \to \mathbb{R} \qquad \text{von} \quad f$$

  definiert durch

  $$f''' := (f'')',$$

  ist also gerade die Ableitung $(f'')'$ *von* f''. *Die dritte Ableitung schreibt man auch als* $f^{(3)}$ *oder* $\dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}$.

Definition 45 (Fortsetzung)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$.

- $$\boxed{f \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist } (n-1)\text{-mal differenzierbar.} \\ f^{(n-1)} \text{ ist differenzierbar.} \end{cases}}$$

In diesem Fall ist die n-te Ableitung

$$f^{(n)} : M \to \mathbb{R} \qquad \text{von} \quad f$$

definiert durch

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)',$$

ist also gerade die Ableitung $\left(f^{(n-1)}\right)'$ von $f^{(n-1)}$. Die n-te Ableitung schreibt man auch als $f^{(n)}$ oder $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Definition 45 (Fortsetzung)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$.

- *f ist n -mal stetig differenzierbar* $\Leftrightarrow$ *f ist n-mal differenzierbar* und *$f^{(n)}$ ist stetig.*

- *f ist unendlich oft differenzierbar (bzw. unendlich oft stetig differenzierbar)* $\Leftrightarrow$ *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f ist n-mal differenzierbar (bzw. n-mal stetig differenzierbar*

- $\boxed{f^{(0)} = f}$.

Satz 26.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *In jedem Punkt $x_0 \in M$, in dem f differenzierbar ist, ist f auch stetig.*
- *Ist f differenzierbar, so ist f auch stetig.*

Differenziebarkeit $\Rightarrow$ **Stetigkeit**

Die Umkehrung gilt nicht

Stetigkeit $\not\Rightarrow$ **Differenzierbarkeit**

Satz 27.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Ist f n-mal stetig differenzierbar, so sind $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ stetige Funktionen.*
- *Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar, so ist f n-mal* ***stetig*** *differenzierbar.*
- *Ist f unendlich oft differenzierbar, dann ist f auch unendlich oft* ***stetig*** *differenzierbar.*

§3.4 Extremwerte, Krümmung, Kurvendiskussion

Der Verlauf von Funktionen $f(x)$ einer reellen Variablen x wird durch folgende Größen grob charakterisiert:

Nullstellen,
Polstellen (sowie anderen Asymptoten),
Extremwerte,
Wendepunkte.

Durch diese Werte ist der Funktionsverlauf qualitiv festgelegt.

Extremwerte und Wendepunkte werden mit Hilfe der Differenzialrechnung bestimmt.

Satz 28. (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)

Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei Punkte mit $x_1 < x_2$ und $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.

Dann existiert eine Zahl ξ mit $x_1 < \xi < x_2$ derart, dass

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Aus diesem Satz gründen sich in den mathematischen Lernbüchern die Beweise verschiedener Sätze der Differenzialrechnung.

Praktische Bedeutung bekommt er in der folgenden Deutung: Setzt man

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

so gilt für kleine Werte von Δx näherungweise

$$\xi \approx x_1 = x$$

und die Gleichung aus Satz 28 erhält die Form

$$\Delta y = \Delta f(x_1) \approx f'(x_1)\Delta x.$$