Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 14

8. Dezember 2009

Kapitel 3. Differenzialrechnung einer Variablen

§3.4 Extremwerte, Krümmung, Kurvendiskussion (Fortsetzung)

Satz 29 (Monotone Funktionen)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion.*

$$f \text{ ist auf } [a, b] \textbf{ monoton wachsend } \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in [a, b].$$

$$f \text{ ist auf } [a, b] \textbf{ monoton fallend } \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0 \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Definition 46.

Es seien $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in M$.

- $$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat im Punkt } x_0 \text{ ein} \\ \textbf{lokales Minimum} \\ (\text{bzw. } \textbf{Maximum}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ sodass} \\ \qquad f(x) \geqslant f(x_0) \\ (\text{bzw. } f(x) \leqslant f(x_0)) \\ \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \end{array}\right.$$
- $$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat im Punkt } x_0 \text{ ein} \\ \textbf{globales Minimum} \\ (\text{bzw. } \textbf{Maximum}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) \geqslant f(x_0) \\ (\text{bzw. } f(x) \leqslant f(x_0)) \\ \text{für alle } x \in M \end{array}\right.$$
- *Der Sammelname für Maximum und Minimum lautet* ***Extremwert****.*

Satz 30.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Es sei $y = f(x)$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und $x_0 \in (a, b)$ ein lokaler Extremwert von $f(x)$.

Dann gilt

$$\boxed{f'(x_0) = 0.}$$

Bemerkung.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig aber nicht hinreichend.

In einem dieser Randpunkte kann ein lokales Extremwert vorliegen, ohne dass dort f' verschwindet.

Satz 31.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und* $x^0 \in M$ *ein Punkt in dem* f' *das Vorzeichen wechselt.*

Das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$, *so dass*

1. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq M$,
2. f' in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ keine Nullstelle hat,
3. $$\boxed{\begin{array}{c} f'(x_0 - \varepsilon/2) < 0 \text{ und } f'(x_0 + \varepsilon/2) > 0 \\ (\textit{Vorzeichenwechsel von } - \textit{ nach } +) \\ \textit{oder} \\ f'(x_0 - \varepsilon/2) > 0 \text{ und } f'(x_0 + \varepsilon/2) < 0 \\ (\textit{Vorzeichenwechsel von } + \textit{ nach } -) \end{array}}$$

Satz 31 (Fortsetzen)

Dann ist $f'(x_0) = 0$, und bei x_0 liegt ein lokaler Extremwert von $f(x)$, und zwar

- *ein lokales Minimum falls das Vorzeichen von f' von $-$ nach $+$ wechselt,*
- *ein lokales Maximum falls das Vorzeichen von f' von $+$ nach $-$ wechselt,*

Bemerkung.

Die obigen Bedingungen sind nur hinreichend aber nicht notwendig, d.h.

es gibt Fälle, bei denen die Bedingungen nicht erfüllt sind, aber trotzdem ein Extremum vorliegt.

Achtung!!! Man muss zeigen, dass

- in der Intervallen $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ keine Nullstelle von f' liegt;
- f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ stetig differenzierbar ist.

Bei dem folgenden Kriterium muss man nur Bedingungen in x_0 überprüfen:

Satz 32.

Es sei M eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in M$ ein Punkt, so dass $f'(x_0) = 0$.

- $\boxed{f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Minimum,}}$
- $\boxed{f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Maximum.}}$

Bemerkung.

Dieses Kriterium ist aber wiederum nicht notwendig.

Bemerkung.

Die obigen Kriterien für Extremwerte waren entwider notwendig (Satz 30) oder hinreichend (Sätze 31 und 32).

Brauchbare Kriterien für lokale Extrempunkte, die **sowohl** notwendig als auch hinreichend sind, lassen sich mit der Differentialrechnung nach meinem Wissen nicht angeben.

Bei den so genannten **Extremwertaufgaben** suct man für eine Funktion in einem vorgegebenen Definitionsbereich ein globales Extremum.

- Zuerst benutzt man dabei die Kriterien um ein lokales Extremum zu finden.
- Dann muss man noch zeigen, dass es ein globales Extremum ist.

Dazu liefert der folgende Satz ein Kriterium.

Satz 33.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, die auf (a, b) stetig differenzierbar sei. Weiterhin sei $x_0 \in [a, b]$.

- *Liegt bei x_0 ein lokales Maximum von f,*

  ist $f(a) < f(x_0)$ und $f(b) < f(x_0)$,

  und gilt für alle $x_* \in (a, b)$ mit $f'(x_*) = 0$, dass entweder $f(x_*) < f(x_0)$ oder $x_* = x_0$ ist,

  dann liegt bei x_0 das eindeutig bestimmte **globale Maximum** von f.

Satz 33 (Fortsetzung)

- *Liegt bei* x_0 *ein lokales Minimum von* f,

  $$\text{ist } f(a) > f(x_0) \text{ und } f(b) > f(x_0),$$

  und gilt für alle $x_* \in (a, b)$ *mit* $f'(x_*) = 0$, *dass entweder* $f(x_*) > f(x_0)$ *oder* $x_* = x_0$ *ist,*

dann liegt bei x_0 das eindeutig bestimmte **globale Minimum** von f.

Definition 47.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ geben, so dass $a < b$ und $[a, b] \subset M$.*

  Eine Funktion f heißt konvex (bzw. konkav) in dem Intervall $[a, b]$, wenn die Sekanten,

  d.h. die Geradeabschnitte, die zwei Kurvenpunkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verbinden,

  für alle Wertepaare $x_1, x_2 \in [a, b]$ immer oberhalb (bzw. unterhalb) des Funktionsgraphen liegen.

Definition 47 (Fortsetzung)

- *Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt Wendepunkt, wenn die Funktion dort ihr Krümmungsverhalten von konkav nach konvex (oder umgekehrt) wechselt,*

  d.h. wenn es $a' < x_0 < b'$ gibt, so dass f in dem Intervall $[a' x_0]$ konkav und in dem Intervall $[x_0, b]$ konvex ist

  (oder f in $[a', x_0]$ konvex und in $[x_0, b]$ konkav ist).

Satz 34.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es seien $a, b \in M$ gegeben, so dass $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

- $\boxed{f \text{ ist konvex in } [a, b] \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} f' \text{ ist auf } [a, b] \\ \text{eine wachsende Funktion.} \end{array}}$
- $\boxed{f \text{ ist konkav in } [a, b] \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} f' \text{ ist auf } [a, b] \\ \text{eine fallende Funktion.} \end{array}}$

Satz 35.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Es seien $a, b \in M$ gegeben, so dass $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

- $\boxed{f \text{ ist konvex in } [a,b] \;\Leftrightarrow\; f''(x) \geqslant 0 \text{ für alle } x \in [a,b].}$
- $\boxed{f \text{ ist konkav in } [a,b] \;\Leftrightarrow\; f''(x) \leqslant 0 \text{ für alle } x \in [a,b].}$

Satz 36.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Es seien $a, b \in M$ gegeben, so dass $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

- $$\boxed{x_0 \text{ ist ein Wendepunkt von } f \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} f''(x_0) = 0 \\ \text{(notwendige Bedingung)} \end{array}}$$

- $$\boxed{\left.\begin{array}{c} f \text{ ist 3-mal stetig diff'bar} \\ f''(x_0) = 0 \\ f^{(3)}(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_0 \text{ ist ein Wendepunkt} \\ \text{von } f \\ \text{(hinreichende Bedingung)} \end{array}}$$