Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 15

15. Dezember 2009

Kapitel 3. Differenzialrechnung einer Variablen

§3.5 Grenzwertberechnung mit l'Hospital, Taylorpolynome und -reihen

Satz 37. (Satz von l'Hospital)

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $g, f : M \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, und es sei

$$g'(x) \neq 0 \quad \textit{fúr alle} \quad x \in M.$$

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Existiert dann $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage gilt auch, wenn man nicht $x_0 \in \mathbb{R}$ fordert und ansonsten entweder überall x_0 durch $+\infty$ oder überall x_0 durch $-\infty$ ersetzt.

Bemerkung.

Die Verwendung der Formel von l'Hospital ist **nur** dann gerechfertig, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert!!!

Wenn dies **nicht** der Fall ist, dann gilt die Gleichung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nicht!!!

Wenn Sie diese Gleichung also erst anwenden, und dann herausbekommen, dass $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, dann durften Sie Satz von l'Hospital gar **nicht anwenden**,

und Sie sollte somit den entsprechende Anfang der Gleichungskette durchstreichen, und notieren, dass l'Hospital nicht anwendbar ist,

und versuchen, anders weiter zu rechnen, es kann dann nämlich sehr wohl sein, dass $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ trotzdem existiert.

Definition 48.

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $x_0 \in M$.

*Dann ist das **Taylorpolynom der Ordnung** n **von** f **im Punkt** x_0, dass durch*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

*definierte Polynom, und das zugehörige **Restglied** ist die Funktion $R_n : M \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in M$ gilt*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Bemerkung.

Sowohl das Taylorpolynom T_n als auch das Restglied R_n hängen vom betrachteten Punkt x_0 ab,

d.h. für eine anderen Punkt x_0' bekommt man ein anderes Polynom und auch ein anderes Restglied.

Satz 38.

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, und $x_0 \in M$.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a < b$, $x_0 \in [a, b]$, $[a, b] \subset M$ und f auf (a, b) $(n + 1)$-mal differenzierbar.

Dann gibt es für jedes $x \in [a, b]$ eine Zahl C_x, die zwischen x und x_0 liegt, so für das restglied R_n zum Taylorpolynom der Ordnung n von f im Punkt x_0 gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Mit dieser Zahl C_x gilt dann auch die Taylorsche Formel

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.}$$

Bemerkung.

Dabei hangt C_x von x **und** x_0 ab.

In der Notation C_x wird die Abhängigkeit von x betont, weil in den Anwendungen typischerweise x_0 festgehalten und nur x variert wird.

Definition 49.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ unednlich oft differenzierbar, und $x_0 \in M$.

*Dann ist die **Taylorreiche** f **im Punkt** x_0 die durch*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

definierte Reihe.

Die Taylorpolynome von f sind also gerade die Teilsummen der entsprechenden Taylorreiche und somit konvergiert die Reihe genau dann gegen $f(x_0)$ wenn die Restglieder gegen 0 gehen.

Satz 39.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ unednlich oft differenzierbar, und $x_0 \in M$.

Es gebe $a, b \in \mathbb{R}$ und $\alpha, C \in (0, +\infty)$, so dass $a < b$, $x_0 \in [a, b]$, $[a, b] \subset M$, und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(s)| \leqslant \alpha C^n.$$

- *Betrachtet man für $x \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ das Restglied R_n zum Taylorpolynom der Ordnung n von f im Punkt x_0, dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Satz 39 (Fortsetzung)

- *Für alle $x \in [a, b]$ gilt die Taylorsche Entwicklung*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$