# Mathematik für Naturwissenschaftler I
# WS 2009/2010

Lektion 16

18. Dezember 2009

# Kapitel 4. Elementare Funktionen

## §4.1 Die Exponentialfunktion

Die wichtige Exponentialfunktion *exp* ist definiert durch eine Potenzreihe:

$$exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$
$$exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(E1) $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(E2)
$$\begin{cases} exp(0) = 1, \\ exp(1) = 2,718281828459 \cdots = e \quad \text{die Eulersche Zahl} \end{cases}$$

(E3) $exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(E4) $exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(E5) $exp(x) < exp(y)$ für $x < y$

**Weitere specielle Werte von *exp*:**

$$\begin{aligned}
exp(2) &= (exp(1))^2 = e^2,\\
exp(3) &= (exp(1))^3 = e^3,\\
&\dots\\
exp(n) &= (exp(1))^n = e^n, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\\
exp(-n) &= (exp(1))^{-n} = e^{-n}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

und für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$$\left(exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = exp\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q \text{ Summanden}}\right) = exp\left(q \cdot \frac{p}{q}\right)$$
$$= exp(p) = e^p.$$

Also

$$exp(r) = exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q} = e^r.$$

Deshalb definiert man auch

$$\boxed{e^x := exp(x)}.$$

Die Exponentialfunktion ist an jeder Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $e^{\xi}$, d.h. es gilt

(E6) $$(e^x)' = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Daraus erhält man zusammen mit der Kettenregel für $a \in \mathbb{R}$

$$(e^{ax})' = ae^{ax} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Von besonderen Interesse ist auch die Funktion

$$y = e^{-x}.$$

Sie kommt sehr häufig in der Physik und Chemie vor, z.B. beim radioktiven Zerfall.

Ist $N_0$ die Anzahl der Teilchen eines radioaktiv zerfallenden Produktes zum Zeitpunkt Null ($t = 0$), so ist die Zahl der Teilchen $N$ zu einem späteren Zeitpunkt $t$ gegeben durch

$$N = N_0 e^{-kt},$$

wobei $k$ eine Stoffkonstante ist.

Häufig fragt man, nach welcher Zeit die Zahl der Teilchen auf die Hälfte gesunken ist. Diese Zeit nennt man dann die Halbwertszeit $\tau$.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-k\tau},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{1}{k} \ln(2),$$

wobei das Symbol ln die weitere definierte Logarithmusfunktion ist, die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion.

# §4.2 Der natürliche Logarithmus

Wir wollen die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion studieren.

Aus (E5) folgt, dass

$$x \longrightarrow e^x$$

streng monoton wachsend ist, deshalb ist die Exponentialfunktion umkehrbar.

Damit ist $exp^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ erklärt, und man nennt die Abbildung

$$\log\, y := \ln\, y := exp^{-1}(y)$$

den natürlichen Logarithmus.

Offenbar gelten die Identitäten:

$$\boxed{\begin{aligned} \log\left(e^{x}\right) &= x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ e^{\log y} &= y \qquad \text{für alle } y > 0. \end{aligned}}$$

(L1)
$$\left.\begin{aligned} \log\,(y_1 \cdot y_2) &= \log\, y_1 + \log\, y_2 \\ \log\,\left(\frac{y_1}{y_2}\right) &= \log\, y_1 - \log\, y_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{für alle } y_1, y_2 > 0.$$

(L2)
$$(\log\, y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \qquad \text{für alle } y > 0.$$

## Berechnung von $e^x$ und $\log x$:

- Funktionstafeln
- Taschenrechner
- Computeralgebra-Systeme: Mathematica, Maple
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- Lineare Interpolation zusammen mit $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $y \in (0,1)$, wobei man für $x \in \mathbb{Z}$ $e^x$ als Potenz berechnet.
- Ist z.B. $\log x_0$ bekannt für $1 \leqslant x_0 < 10$, so erhält man

$$\text{für } x > 10 \quad \log x = \log\left(10^k x_0\right) = k \log 10 + \log x_0,$$

$$\text{für } 0 < x < 1 \quad \log x = -\log \frac{1}{x}.$$

# §4.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Betrachten wir für $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Der Grenzwert existiert für jedes $z \in \mathbb{C}$, d.h. die Reihe ist konvergent, nach dem Majorantenkriterium.

$$\boxed{exp\, z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

(EK1) $\quad exp\,(z_1 + z_2) = exp\,(z_1) \cdot exp\,(z_2) \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(EK2) $\quad exp\,(-z) = \dfrac{1}{exp\,(z)}$

(EK3) Ist insbesondere $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so folgt

$$exp(z) = exp(x + iy) = exp(x) \cdot exp(iy) = e^x \cdot exp(iy)$$

(EK4) $\quad exp\,(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$.

Für beliebige $y \in \mathbb{R}$ ist

$$|exp(iy)| = 1.$$

Wir definieren nun (analytisch)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(y) &= Re\,(exp(iy))\,, \\ \sin(y) &= Im\,(exp(iy))\,. \end{aligned}}$$

$$exp\,(iy)\cos\,(y) + i\sin\,(y),$$

sowie

$$\boxed{exp\,(z) = exp\,(x + iy) = e^x\,(\cos\,(y) + i\sin\,(y))\,.}$$

Aus der Potenzreihe für $exp(z)$ erhalten wir sofort die Reihendarstellung von sin und cos

$$z = x + iy, \quad x = 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$\cos(y) = Re\,(exp(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos(y) = Im\,(exp(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$


Frohe
Weihnachten