Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 17

5. Januar 2010

Kapitel 4. Elementare Funktionen

§4.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Für beliebige $y \in \mathbb{R}$ ist

$$|exp(iy)| = 1.$$

Wir definieren nun (analytisch)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(y) &= Re\,(exp(iy))\,, \\ \sin(y) &= Im\,(exp(iy))\,. \end{aligned}}$$

$$exp\,(iy) = \cos\,(y) + i\sin\,(y),$$

sowie

$$\boxed{exp\,(z) = exp\,(x + iy) = e^x\,(\cos\,(y) + i\sin\,(y))\,.}$$

Aus der Potenzreihe für $exp(z)$ erhalten wir sofort die Reihendarstellung von sin und cos

$$z = x + iy, \quad x = 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$\cos(y) = Re\,(exp(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(y) = Im\,(exp(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Kapitel 5. Funktionen mehrerer Veränderlicher, Stetigkeit und partielle Ableitungen

§5.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Um eine Funktion betrachten zu können, die von mehr als einer Variablen abhängt, benötigt man geeignete Definitionsmengen.

Dazu sei an den Begriff eines Zahlentupels erinnert:

Definition 50.

Es sei $k \in \mathbb{N}$

- *Ein k-Tupel aus $\mathbb{R}$ ist ein Abbildung*

$$v : \{1, 2, \dots, k\} \to \mathbb{R},$$

  geschrieben als $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ mit $v_i := v(i)$ für alle Indizes $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

- *Es ist $\mathbb{R}^k$ die Menge aller k-Tupel aus $\mathbb{R}$.*
- *Ein 2-Tupel aus $\mathbb{R}$ wird auch als Zahlenpaar oder Paar bezeichnet, ein 3-Tupel als Zahlentripel oder Tripel und ein 4-Tupel als Zahlenquadrupel oder Quadrupel*

Definition 50 (Fortsetzung)

- *sind $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist Kreuzprodukt dieser Mengen definiert durch*

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k := \left\{ \begin{array}{r} (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \\ x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_k \in M_k \end{array} \right\}.$$

Definition 51.

- *Eine Funktion von k Veränderlichen ist eine Abbildung*

$$f : M \to \mathbb{R},$$

wobei M eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist.

Definition 51 (Fortsetzung)

- *Zur Definition einer Funktion von k Veränderlichen benutzt man die Schreibweisen*

$$\boxed{z = \text{ mathematischer Ausdruck}}$$

oder

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \text{ mathematischer Ausdruck}},$$

wobei der mathematischer Ausdruck i.A. von $x_1, \ldots, x_k$ oder einer Auswahl dieser Veränderlichen abhängt.

Definition 51 (Fortsetzung)

- *Eine Funktion von mehreren Veränderlichen ist eine Abbildung,*

  für die es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ gibt, so dass die Abbildung eine Funktion von k Veränderlichen ist.

§5.2. Partielle Ableitungen von Funktionen von zwei Veränderlichen

$$D \ni (x, y) \to f(x, y)$$

Es sei nun $(x_0, y_0) \in D$ fest;

Betrachtet man die Funktionen g, h definiert durch

$$x \mapsto g(x) := f(x, y_0)$$
$$y \mapsto h(y) := f(x_0, y)$$

Dann sind g und h Funktionen von einer reellem Variablen. Falls g differenzierbar in x_0 ist bzw. h differenzierbar in y_0, so setzt man

$$f_x(x_0, y_0) := g'(x_0)$$
$$f_y(x_0, y_0) := h'(y_0).$$

Man nennt dann

$f_x(x, y)$ - die partielle Ableitung von f nach x

und

$f_y(x, y)$ - die partielle Ableitung von f nach y.

Definition 52.

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

Aus f erhält man n Funktionen einer Variablen f_i $i = 1, \ldots, n$ (x_j fest für $i \neq j$) durch die Vorschrift

$$x_i \mapsto f_i(x_i) := f\left(\underbrace{x_1, \ldots, x_{i-1}}_{\text{fest}}, x_i, \underbrace{x_{i+1}, \ldots, x_n}_{\text{fest}}\right)$$

Sind die f_i differenzierbar mit Ableitungen f_i', so heißen die n Funktionen von n Variablen

$$D \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_i'(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

partielle Ableitungen von f nach x_i.

Bemerkungen.

- $$\boxed{\text{partielle Ableitungen = gewöhnliche Ableitungen}},$$

  bei denen man alle Variablen bis auf eine festhält.
- Differentiationsregeln übertragen sich.
- Für unterschiedliche Punkte (x_0, y_0) erhält man im allgemeinen auch unterschiedliche Funktionen g, h.