Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 18

8. Januar 2010

Kapitel 5. Funktionen mehrerer Veränderlicher, Stetigkeit und partielle Ableitungen

§5.2. Partielle Ableitungen von Funktionen von zwei Veränderlichen (Fortsetzung)

Definition 53.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$.

- *Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sind f_x und f_y.*
- *Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f erhält man durch zweimaliges partielles Ableitungen. In Kurzdarstellung definiert man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung durch*

$$\begin{aligned} f_{xx} &:= (f_x)_x \qquad & f_{yx} &:= (f_y)_x \\ f_{xy} &:= (f_x)_y \qquad & f_{yy} &:= (f_y)_y \end{aligned}$$

Definition 53 (Fortsetzung)

- *Mit dem Symbol ∂ der partiellen Differentiation werden Ableitungen zweiter Ordnung wie folgt dargestellt*

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- *Für $n \in \mathbb{N}$ ergeben sich die partiellen Ableitungen n-ter Ordnung entsprechend durch n-faches partiellen Differenzieren.*

Definition 53 (Fortsetzung)

- *Die partiellen Ableitungen n-ter Ordnung, die nicht von der Form $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ oder $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ sind, nennt man gemischte Ableitungen.*

Satz 40 (Satz von Schwarz)

Für die Funktion

$$M \ni (x_1, \dots, x_n) \to f(x_1, \dots, x_n)$$

seien alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k stetig ($k \geqslant 2$).

Dann stimmen alle gemischten Ableitungen l-ter Ordnung ($2 \leqslant l \leqslant k$) überein;

mit anderen Worten: Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen an.

§5.3 Die Kettenregel

Es sei $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ offen (z. B. $M_1 =$ Kugel, Würfel, Quader),

$$M_1 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

stetig partiell differenzierbar.

Weiter sei $M_2 \subset \mathbb{R}^2$ offen, und die Abbildung

$$M_2 \ni (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in \mathbb{R}^2$$

sei ebenfalls partiell differenzierbar (d.h. φ_1 und φ_2) mit

$$(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in M_1 \qquad \text{für alle} \quad (u, v) \in M_2.$$

Dann besitzt die Abbildung

$$F : M_2 \mapsto \mathbb{R}$$
$$F(u,v) := f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$$

partielle Ableitungen F_u, F_v, für die gilt

$$\begin{aligned}
F_u(u,v) &= f_{x_1}\left(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\
&\qquad + f_{x_2}\left(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v), \\
F_v(u,v) &= f_{x_1}\left(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\
&\qquad + f_{x_2}\left(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Bemerkung.

Die Kettenregel ist besonders wichtig bei Koordinatentransformationen.

Nun betrachten wir den Fall eine Kurve in der (x_1, x_2)-Ebene bzw. im (x_1, x_2, x_3)-Raum.

Also, betrachten wir eine stetige, differenzierbare Abbildung

$$I \ni t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$

bzw.

$$I \ni t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Interpretation (physikalisch):

Bewegung eines Massepunktes.

Im Fall $\mathbb{R}^2$ nennt man φ eine ebene Kurve, und im Fall $\mathbb{R}^3$ heißt φ Raumkurve.

Es sei nun $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und eine Funktion

$$D \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

gegeben; wieter φ eine Raumkurve mit $\varphi(I) \subset D$.

Dann ist die Verkettung von f mit φ erklärt und liefert eine Funktion auf I:

$$I \ni t \mapsto F(t) := (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$$

Existieren dann die partiellen Ableitungen von f auf und sind stetig, und ist jedes φ_i, $i = 1, 2, 3$ differenzierbar auf I, so gilt die Kettenregel (Spezialfall)

$$\begin{aligned} F'(t) = f_{x_1}\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\right) \cdot \varphi_1'(t) \\ + f_{x_2}\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\right) \cdot \varphi_2'(t) \\ + f_{x_3}\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\right) \cdot \varphi_3'(t). \end{aligned}$$

§5.4 Partielle Ableitungen in der Thermodynamik

In der Thermodynamik werden partielle Ableitungen physikalischer Größen oft in der Form

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}$$

geschrieben, wobei

$S = f(T, V, n)$	Entropie eines Systems,
$T =$	Temperatur,
$V =$	Volumen,
$n =$	Anzahl der Mole.

Bemerkung.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}$$

man dies dann so liest, dass man s nach T ableitet und dabei die anderen Veränderlichen V und n fest lässt.

In der Mathematik wird aus der Definition einer Funktion klar, von welchen Veränderlichen sie abhängt, bei der Betrachtung physikalischer Großen in der Thermodynamik ist dies nicht immer der Fall.

Wird z.B. für eine Größe wie die Entropie die Abhängigkeit von zwei unterschiedlichen Sätzen von physikalischen Größen betrachtet, benutzt man trotzdem in beiden Fällen $S = S(\dots)$ als Bezeichnung für diese Abhängigkeit.

Die Schreibweise

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}$$

muss man eigentlich so lesen, dass man eine Funktion $f(T, V, n)$ betrachtet, so dass für die Entropie S gilt

$$S = f(T, V, n)$$

und

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n} = \frac{\partial f(T, V, n)}{\partial T}.$$

Mit

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}$$

wird analog eine Funktion $g(T, p, n)$ betrachtet, so dass für die Entropie S gilt

$$S = g(T, p, n)$$

und

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{\partial g(T, p, n)}{\partial T}.$$