Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 19

15. Januar 2010

Kapitel 5. Funktionen mehrerer Veränderlicher, Stetigkeit und partielle Ableitungen

§5.5 Totale Differenzierbarkeit und totales Differential

§5.4 Totale Differenzierbarkeit und totales Differential

Für $n = 1$ bedeutete die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 die Existenz der Abbildung $f'(x_0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Differenzierbarkeit } f(x)\\ \text{an der Stelle } x_0\end{array}} \quad = \quad \boxed{\text{Existenz } f'(x_0)}.$$

Für $n > 1$ sind Differenzierbarkeit und Existenz partiellen Ableitungen unterschiedliche Begriffe.

Definition 54.

Eine im Gebiet M definierte Funktion

$$u = f(x, y)$$

*heißt **total (vollständig) differenzierbar** an der Stelle* (x_0, y_0)*, wenn gilt:*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \{ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y \} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Definition 55.

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$*,* $M \neq \emptyset$*,* $f : M \to \mathbb{R}$*.*

Der lineare Differentialausdruck

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

heißt das zur Stelle (x_0, y_0) *und zu den Argumentenwächsen* Δx *und* Δy *gehörige totale Differential der Funktion* f*.*

Satz 41.

Besitzt eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in M$ stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung, so ist $f(x, y)$ an dieser Stelle total differenzierbar.

Sei

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

und f total differenzierbar an der Stelle (x_0, y_0).

Dann folgt

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Delta f \approx df.$$

§5.6 Taylor-Formel

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion auf D. Alle auftretenden partiellen Ableitungen seien stetig.

Im Folgenden sei D eine konvexe Menge, d.h. zu je zwei Punkten $a, y \in D$ gehört auch die Verbindungsstrecke $\{a + t(y - a) : t \in [0, 1]\}$ zu D.

Betrachte eine neue Funktion $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} F(t) &:= f\left(a_1 + t(y_1 - a_1), a_2 + t(y_2 - a_2), \ldots, a_n + t(y_n - a_n)\right) \\ &= f(a + t(y-a)) \end{aligned}$$

für $t \in [0,1]$.

Zur Berechnung der Ableitungen verwenden wir die Kettenregel und erhalten

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a_j)\, f_{x_j}(a + t(y-a))$$

$$F''(t) = \sum_{j,k=1}^{n} (y_j - a_j)\,(y_k - a_k)\, f_{x_j x_k}(a + t(y-a)).$$

Die Taylor-Formel (der Ordnung 2) für eine Variable liefern

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\Theta)$$

für geeignetes $\Theta \in [0, 1]$.

Mit $F(0) = f(a)$, $F(1) = f(y)$ folgt die Taylor-Formel der ordnung 2 bei mehreren Varibeln.

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, und sind $a, y \in D$, so gilt für geeignetes $\Theta \in [0, 1]$

$$\boxed{\begin{aligned} f(y) = f(a) &+ \sum_{j=1}^{n}(y_j - a_j)f_{x_j}(a) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(y_j - a_j)(y_k - a_k)\, f_{x_j x_k}(a + \Theta(y - a)). \end{aligned}}$$

Denkt man sich a fixiert und y nahe a, so erhält man Näherungsfolmeln

lineare Approximation

$$\boxed{f(y) \approx f(a) + \sum_{j=1}^{n} (y_j - a_j) f_{x_j}(a)}$$

quadratische Approximation

$$\boxed{f(y) \approx f(a) + \sum_{j=1}^{n} (y_j - a_j) f_{x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (y_j - a_j)(y_k - a_k) f_{x_j x_k}(a)}$$

§5.7 Fehlerrechnung

Eine naturwissenschaftliche Gesetzmäßigkeit lasse sich beschreiben in Form einer mathematischen Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Bei Messungen erhält man die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und y ist die gesuchte Größe.

Messungen sind aber im Allgemeinen **nicht exakt** möglich!

Situation:

gemessene Werte: $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n \quad \Rightarrow \quad$ bekannt $\quad \tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$

wahre Werte: $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \quad \Rightarrow \quad$ unbekannt $\quad \bar{y} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

Man nennt

$$|\tilde{y} - \bar{y}| = |f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)|$$

den absoluten Fehler von y.

Frage:

Wie groß kann $|\tilde{y} - \bar{y}|$ werden, wenn man weiß, wie groß die Meßfehler $|\tilde{x}_i - \bar{x}_i|$ ($i = 1, \ldots, n$) sind?

Sei f total differenzierbar und sei

$$|\tilde{x}_j - \bar{x}_j| \leqslant \varepsilon_j \qquad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wegen der totalen Differenzierbarkeit von f, erhält man eine Abschätzung für den Betrag des absolutes Fehlers

$$|\tilde{y} - \bar{y}| = |f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)| \approx \left| \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j - \tilde{x}_j) f_{x_j}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \left| f_{x_j}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \right| .$$

Fall 2 Veränderlichen:

$$\boxed{\begin{aligned} |\tilde{y} - \bar{y}| &= |f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)| \\ &\leqslant |\tilde{x}_1 - \bar{x}_1||f_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| + |\tilde{x}_2 - \bar{x}_2||f_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)| \end{aligned}}$$