Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 20

19. Januar 2010

Kapitel 5. Funktionen mehrerer Veränderlicher, Stetigkeit und partielle Ableitungen

§5.7 Fehlerrechnung (Fortsetzung)

Im Gegensatz zum absoluten Fehler $|\tilde{y} - \bar{y}|$ kommt es meist eher den relativen Fehler an:

$$\frac{|\tilde{y} - \bar{y}|}{|\bar{y}|} \approx \frac{|\tilde{y} - \bar{y}|}{|\tilde{y}|}$$

bzw. in Prozent

$$100 \cdot \frac{|\tilde{y} - \bar{y}|}{|\tilde{y}|}\%$$

Sonderfall:

$$y = f(x_1, \dots, x_n) := a x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \cdot \dots \cdot x_n^{c_n} \tag{5.7.1}$$

für $x_i > 0$, $a \neq 0$ und $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Es folgt mit linearen Approximation

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{j=1}^{n} a c_j (\bar{x}_j - \tilde{x}_j) \tilde{x}_1^{c_1} \dots \tilde{x}_{j-1}^{c_{j-1}} \mathbf{x}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c_j-1}} \tilde{x}_{j+1}^{c_{j+1}} \dots \tilde{x}_n^{c_n}$$
$$+ f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n).$$

Dann

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{y}-\tilde{y}}{\tilde{y}} &= \frac{f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)-f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)}{f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)} \\
&= \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} ac_j(\bar{x}_j-\tilde{x}_j)\tilde{x}_j^{c_j-1}\tilde{x}_1^{c_1}\dots\tilde{x}_{j-1}^{c_{j-1}}\cdot\tilde{x}_{j+1}^{c_{j+1}}\dots\tilde{x}_n^{c_n}}{a\tilde{x}_1^{c_1}\dots\tilde{x}_j^{c_j}\dots\tilde{x}_n^{c_n}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j(\bar{x}_j-\tilde{x}_j)}{\tilde{x}_j}\right)
\end{aligned}$$

und wir erhalten für den relativen Fehler die Näherung

$$\left|\frac{\bar{y}-\tilde{y}}{\tilde{y}}\right| \approx \sum_{j=1}^{n} |c_j| \frac{|\bar{x}_j - \tilde{x}_j|}{|\tilde{x}_j|}.$$

Wir halten fest:

Im Sonderfall (5.7.1) ist die relativ Fehler (von y) eine lineare Funktion der relativen Fehler (der x_j).

§5.8 Extrema ohne Nebenbedingungen

Die Funktion

$$D \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

besitze stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung 2.

Definition 56.

Man sagt, dass f in $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein relatives (oder lokales) Minimum bzw. ein relatives (oder lokales) Maximum hat, wenn es eine Umgebung

$$U := \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1, \ldots, n\}$$

von a gibt, so dass gilt:

$$\left.\begin{array}{c} f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{bzw.} \\ f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(a_1, \ldots, a_n) \end{array}\right\} \qquad \text{für alle} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in U \cap D.$$

Definition 57.

Man sagt, dass f in $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum hat, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{c} f(x_1, \dots, x_n) \geqslant f(a_1, \dots, a_n) \\ \textit{bzw.} \\ f(x_1, \dots, x_n) \leqslant f(a_1, \dots, a_n) \end{array}\right\} \quad \textit{für alle} \quad (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Bemerkung.

jedes globale Extremum ist gleichzeitig ein lokales, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Satz 42. (Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums)

Nimmt f in $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein lokales Extremum an, und gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Umgebung

$$U = U_\delta(a) \subset D,$$

so gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Bemerkung.

Man kann das obige notwendige Kriterium auch wie folgt formulieren:

Besitzt die partiell differenzierbare Funktion f im Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein lokales Extremum, so ist a entweder ein stationären Punkt

(d.h. im Punkt a alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung gleichzeitig verschwinden)

oder ein Randpunkt des Definitionsbereich.

Satz 43. (Hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums, $n = 2$)

Im Punkte $a = (a_1, a_2)$ *sei*

$$f_{x_1}(a_1, a_2) = f_{x_2}(a_1, a_2) = 0$$

- *und zusätzlich*

$$\boxed{f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) - f^2_{x_1 x_2}(a_1, a_2) > 0}$$

so liegt für

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) > 0 \qquad & \textit{ein lokales Minimum} \\ f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) < 0 \qquad & \textit{ein lokales Maximum} \end{aligned}$$

vor.

Satz 43. (Fortsetzung)

- *Ist hingegen*

$$\boxed{f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) - f^2_{x_1 x_2}(a_1, a_2) < 0}$$

  so liegt kein lokales Extremum vor.

- *Ist*

$$\boxed{f_{x_1 x_1}(a_1, a_2) f_{x_2 x_2}(a_1, a_2) - f^2_{x_1 x_2}(a_1, a_2) = 0}$$

  der Fall ist gesondert zu untersuchen.