Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 22

29. Januar 2010

Kapitel 5. Funktionen mehrerer Veränderlicher, Stetigkeit und partielle Ableitungen

§5.10 Extrema unter Nebenbedingungen

Vielfach tritt das Problem auf, Extrema einer Funktion $u = f(x, y)$ zu bestimmen, wenn x und y gleichzeitig noch irgenddeiner Nebenbedingung unterliegen, d.h. einer Gleichung $g(x, y) = 0$ genügen.

Man spricht dann vor der Bestimmung eines Extremums mit Nebenbedingungen.

Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen:

1 Die Reduktionsmethode

Die Gleichung für die Nebenbedingung

$$g(x, y) = 0$$

sei **eindeutig** nach einer der Variablen auflösbar. Wir nehmen an, dass die Gleichung nach y auflösbar ist:

$$y = \psi(x).$$

Dann erhält man durch Einsetzen von $y = \psi(x)$ in die Ausgangsfunktion $u = f(x, y)$ eine Funktion

$$F(x) = f(x, \psi(x)),$$

die nur noch von einer Variablen x abhängt. Damit ist das Problem auf die Bestimmung von Extremwerten einer Funktion einer Variablen zurückgeführt worden.

Bemerkung.

Die Anwendung dieser Methode auf den Fall von mehr als zwei Variablen und mehr als zwei Nebenbedingungen ist i. Allg. nicht möglich.

2 Die Methode der Lagrange-Multiplikation

1) Ermittlung aller stationären Punkte der Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

2) Untersuchung, in welchem der stationären Punkte ein lokales Extremum von f vorliegt.

Bemerkung.

Hinreichende Bedingungen im Zusammenhang mit der Methode der Lagrange-Multiplikationen sind relativ kompliziert zu formulieren und zu überprüfen.

In einefachen Fällen kommt man mit Hilfe geometrische Überlegungen zum Ziel.

Kapitel 6. Integralrechnung

§6.1 Ober- und Untersummen

Beispiel 6.1.1

Berechnen wir der Fläche, die von der Parabel $y = x^2$, der positiven x-Achse und der Geraden $\{x = b > 0\}$ berandet wird.

1) Äquidistante Zerlegung
Zerlegung von $[0, b]$ in n gleiche Teile, $n \in \mathbb{N}$

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{b}{n},\ x_2 = \frac{2b}{n}, \ldots, x_{n-1} = (n-1)\frac{b}{n},\ x_n = b$$

Beispiel 6.1.1 (Fortsetzung)

2) Obersummen

Über $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ errichte Rechteck der Höhe x_k^2. Summe der Flächeninhalte dieser Rechtecke

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} x_k^2 = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \frac{b}{n} \right)^2 = \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Beispiel 6.1.1 (Fortsetzung)

3) **Untersummen**

Über $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ errichte Rechteck der Höhe x_{k-1}^2. Summe der Flächeninhalte dieser Rechtecke

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} x_{k-1}^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2}_{\sum\limits_{m=1}^{n-1} m^2} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Beispiel 6.1.1 (Fortsetzung)

Bezeichnet I_b den gesuchten Flächeninhalt, so gilt offenbar

$$U_n \leqslant I_b \leqslant O_n.$$

Es gibt die Formel

$$\sum_{k=1}^{s} k^2 = \frac{1}{6} s(s+1)(2s+1).$$

Es folgt somit

$$O_n = \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{6} 2 = \frac{b^3}{3}$$
$$U_n = \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{6} 2 = \frac{b^3}{3}$$

Beispiel 6.1.1 (Fortsetzung)

Der einzig vernünftige Wert für den gesuchten Flächeinhalt ist demnach

$$I_b = \frac{b^3}{3}.$$

Definition 59.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

Für $n \in \mathbb{N}$ zerlegt man das Intervall $[a, b]$ durch $n + 1$ Teilpunkte

$$x_k = a + k\frac{b - a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

in n Teilintervalle gleicher Länge.

Definition 59 (Fortsetzung)

Nun definiert man die Öbersummen" O_n und Üntersummen" U_n durch

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k),$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_{k-1})$$

Lemma 43.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien O_n und U_n definiert wie in der Definition 59.

Lässt man n gegen unendlich streben, so konvergiert O_n und U_n gegen denselben Wert.

Definition 60.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset M$.

- *Dann ist $\int\limits_a^b f(x)dx$, das (bestimmte) Integral von $f(x)$ in Bereich von a bis b (auch (bestimmtes) Integral über $f(x)$ von a bis b, oder auch (bestimmtes) Integral von $f(x)$ über den Intervall $[a, b]$ genannt) definiert durch*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k).$$

Definition 60 (Fortsetzung)

- *Weiterhin werden noch die Integrale*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

definiert. Für diese wird die Bezeichnung mit dem Intervall nicht verwendet.

Satz 44.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $I \subset M$ eine nichtleere Intervall und $r \in \mathbb{R}$. Es seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Dann gelten für alle $a, b, c \in I$ die folgenden Regeln:

$$\int_a^b r \cdot f(x)dx + \int_a^b r \cdot g(x)dx = r \int_a^b (f(x) + g(x))dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx;$$

Satz 44 (Fortsetzung)

Ist $a \leqslant b$ und ist $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$