Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 23

22. Februar 2010

Kapitel 6. Integralrechnung

§6.2 Die Stammfunktion und das unbestimmte Integral

Definition 61.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und N eine nichtleere Teilmenge von M.

- *Eine **Stammfunktion** von f auf N ist eine Funktion $F : K \to \mathbb{R}$ mit $N \subset K \subset \mathbb{R}$, die auf N differenzierbar ist, so dass*
$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in N.$$
- *Ist F eine Stammfunktion von f auf N und ist N ein Intervall, dann sagt man auch, dass F das **unbestimmte Integral** von f auf N ist, und schreibt dies als*
$$\int f(x)dx = F(x) \qquad \text{auf} \quad N.$$

Definition 61. (Fortsetzung)

- *Eine Stammfunktion von f ist eine Funktion F so dass f gerade F' ist, d.h.*

  eine Funktion $F : K \to \mathbb{R}$ mit $M \subset K \subset \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion von f auf M ist und für $x \in K \setminus M$ nicht differenzierbar ist.

Bemerkungen

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset M$ ein nichtleerer Intervall

Ist F eine Stammfunktion von f	$\Rightarrow$	Ist F eine Stammfunktion von f auf I.

- Ist G eine Stammfunktion von f auf I, so liefert dies nur, dass keinerlei Informationen über G auf $\mathbb{R} \setminus I$.

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Die Schreibweise

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{auf } N$$

ist keine normale Gleichheit von Funktionen, denn aus $\int f(x)dx = F_1(x)$ auf N und $\int f(x)dx = F_2(x)$ auf N folgt nur, dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad \text{für alle } x \in I.$$

Satz 45.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist für alle $C \in \mathbb{R}$ auch die durch $F(x) + C$ definierte Funktion eine Stammfunktion von f.*
- *Es sei $I \subset M$ ein nichtleerer Intervall und F_1 eine Stammfunktion von f auf I. Es sei $F_2 : N \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $I \subset N \subset \mathbb{R}$. Dann*

F_2 eine Stammfunktion auf I ist	$\Leftrightarrow$	*Es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $F_1(x) + C = F_2(x)$ für alle $x \in I$.*

Bemerkung

In der Literatur (z.B. *Zachmann, S.243*) wird die Aussage des obigen Satz oft in der Form

"Je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um eine Konstante"

wieder gegeben.

Dabei unterschlagt man aber, dass die Konstante nur jeweils auf einem Intervallen innerhalb des Definitionsbereich fest ist, sich aber bei Definitionslücken von f ändern kann.

Tabelle der Grundintegrale:

Funktion $F(x)$	Stammfunktion (unbestimmtes Integral) $F(x) = \int f(\xi) d\xi$
$x^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ n \neq -1$	$\int \xi^n d\xi = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln(x) + C$
e^x	$\int e^\xi d\xi = e^x + C$

$\sin(x)$	$\int \sin(\xi)d\xi = -\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\int \cos(\xi)d\xi = \sin(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin(x) + C$

$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\displaystyle\int \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$

Satz 46.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $I \subset M$ ein nichtleerer Intervall. Es sei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante.

- *Für $r, s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int (rf(\xi) + sg(\xi))\, d\xi = r \int f(\xi) d\xi + s \int g(\xi) d\xi + C \quad \text{auf} \quad I;$$

Satz 46. (Fortsetzung)

- *Sind f und g auf I stetig differenzierbar, so gelten die Regeln der partiellen Integration*

$$\int \left(f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)\right) d\xi = f(x)g(x) + C \quad auf \quad I;$$

$$\int f'(\xi)g(\xi)d\xi = f(x)g(x) - \int f(\xi)g'(\xi)d\xi + C \quad auf \quad I.$$

Satz 46. (Fortsetzung)

- *Ist g stetig differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $h : N \to \mathbb{R}$ mit $g(I) \subset N$ stetig, und $H : N \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von h, so liefert die Substituionsregel:*

$$\int h(g(\xi))g'(\xi)d\xi = H(g(x)) + C \quad auf \quad I.$$

Satz 46. (Fortsetzung)

- *Ist g stetig differenzierbar und $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist*

$$\int \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} d\xi = \ln |g(x)| + C \quad \textit{auf} \quad I.$$

§6.3 Zusammenhang zwischen bestimmten Integralen und Stammfunktionen

Satz 47 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $I \subset M$ ein nichtleerer Intervall.

- *Es sei $x_0 \in I$ und $F_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

  Dann ist F_{x_0} eine Stammfunktion von f auf I.

- *Für jede Stammfunktion F von f auf I und alle $a, b \in I$ gilt*

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Satz 48.

Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenziebare Funktionen und $I \subset M$ ein nichtleerer Intervall.
Dann gilt für alle $a, b \in I$:

- *Die Regel der partiellen Integration liefert*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Satz 48 (Fortsetzung)

- *Ist* $h : N \to \mathbb{R}$ *mit* $g(I) \subset N$ *eine stetige Funktion und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$*, so liefert die Substitutionsregel:*

$$\int_a^b h(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(s)ds.$$