Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 3

20. Oktober 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.4 Crundlegende Begriffe und Definitionen für Funktionen

Definition 16.

Um eine Funktion zu definieren, wird häufig die Schreibweise

$$\boxed{y = \textit{mathematischer Ausdruck}}$$

verwendet, wobei der mathematische Ausdruck i.a. von x abhängt.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Menge M aller x, für die der betreffende mathematische Ausdruck einen wohldefinierten Wert hat, nicht leer ist.

$$\boxed{y = \textit{mathematischer Ausdruck}}$$

Die Schreibweisen beschreibt die Abbildung von M nach N, die jedes $x \in M$ auf den entsprechenden Wert des mathematischen Ausdruck abbildet.

Ebenso werden die Schreibweisen

$$\boxed{y = f(x) = \textit{mathematischer Ausdruck}}$$

oder

$$\boxed{f(x) = \textit{mathematischer Ausdruck}}$$

verwendet.

Diese definieren analog wie oben eine Abbildung, und legen noch fest, dass diese mit f bezeichnet werden soll.

x heißt die unabhängige Variable.

Bemerkung.

Achtung!!!

Hierbei kann f auch durch andere Funktionsbezeichnungen wie z.B. g, ϕ, U, V oder auch y ersetzt werden.

Ebenso kann auch die unabhängige Variable nicht mit x sondern mit einen anderen Buchstaben wie z.B. t, r, z, V, T bezeichnet sein, gleiches gilt für abhängige Variable y.

Andere Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen:

- Verbale Darstellung
- Darstellung durch eine Tabelle von Messwerten (empirische Funkton)
- Graphische Darstellung durch eine Kurve in der Ebene (Graph von f).

Definition 17.

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

Die Urbildmenge M nennt man auch Definitionsbereich der Funktion f.

$$M = D(f).$$

Definition 18.

Erfüllt die Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$ die Gleichung

$$F(x, y) = 0, \qquad (1.4.1)$$

d.h. gilt $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in D(f)$, so heißt $y = f(x)$ eine durch $F(x, y) = 0$ implizit definierte Funktion von x.

Definition 19.

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Man sagt, dass f eine monoton fallende Funktion ist dann und nur dann, wenn für alle $r, s \in M$ mit $r > s$ gilt $f(r) \leqslant f(s)$.*
- *Man sagt, dass f eine monoton wachsende Funktion ist dann und nur dann, wenn für alle $r, s \in M$ mit $r > s$ gilt $f(r) \geqslant f(s)$.*

Definition 19. (Fortsetzung)

- *Man sagt, dass f eine streng monoton fallende* Funktion ist *dann und nur dann, wenn für alle $r, s \in M$ mit $r > s$ gilt $f(r) < f(s)$.*
- *Man sagt, dass f eine streng monoton wachsende Funktion ist dann und nur dann, wenn für alle $r, s \in M$ mit $r > s$ gilt $f(r) > f(s)$.*

Definition 20.

Sei $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

*f heißt auf M **periodisch** mit der Periode $\tau \neq 0$ dann und nur dann, wenn*

1) $x \in M \quad \Rightarrow \quad x + \tau \in M,$
2) $f(x + \tau) = f(x)$ *für alle* $x \in M$.

Definition 21.

Sei $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$ *und* $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.*

φ *heißt auf* M *gerade dann und nur dann, wenn*

1) $x \in M \quad \Rightarrow \quad -x \in M$,
2) $\varphi(x) = \varphi(-x)$ *für alle* $x \in M$.

φ *heißt auf* M *ungerade dann und nur dann, wenn*

1) $x \in M \quad \Rightarrow \quad -x \in M$,
2) $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ *für alle* $x \in M$.

Bemerkung.

Gerade Funktion ist symmetrisch zur Ordinatenachse.

Ungerade Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.

Definition 22.

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und $g : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

*g ist **beschränkt** dann und nur dann, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in M$ gilt*

$$|f(x)| \leqslant C.$$

*Anderfalls nennt man die Funktion **unbeschränkt**.*

Definition 23.

Sei $N, M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$ und $f : M \to N$ eine bijektive Funktion.

Dann die Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion, die mit f^{-1} bezeichnet wird

$$f^{-1} : N \to M,$$
$$f(x) \to x.$$

Berechnung der Umkehrfunktion

1. Man löst die vorgegebene Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der unabhängigen Variablen x auf. Die so erhaltene Funktion
$$x = f^{-1}(y)$$
ist die **Umkehrfunktion** von $y = f(x)$.

2. Durch formales Vertauschen der beiden Variablen in der Gleichung
$$x = f^{-1}(y)$$
erhält man
$$y = f^{-1}(x).$$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ besitzen denselben Graphen.

Der Graph von $y = f^{-1}(x)$ stellt eine Spiegelung von $y = f(x)$ an der Geraden $y = x$ dar.