Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 4

23. Oktober 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.4 Crundlegende Begriffe und Definitionen für Funktionen (Fortsetzung)

Berechnung der Umkehrfunktion

1. Man löst die vorgegebene Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der unabhängigen Variablen x auf. Die so erhaltene Funktion
$$x = f^{-1}(y)$$
ist die **Umkehrfunktion** von $y = f(x)$.

2. Durch formales Vertauschen der beiden Variablen in der Gleichung
$$x = f^{-1}(y)$$
erhält man
$$y = f^{-1}(x).$$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ besitzen denselben Graphen.

Der Graph von $y = f^{-1}(x)$ stellt eine Spiegelung von $y = f(x)$ an der Geraden $y = x$ dar.

Satz 1.

Jede streng monoton Funktion f einer reellen Variablen besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}, die ebenfalls streng monoton ist.

Ist f streng monoton wachsend (fallend), so ist auch f^{-1} streng monoton wachsend (fallend).

§1.5 Umformen von Gleichungen und Ungleichungen

Wir fassen kurz zusammen, was man beim Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen tun darf und was nicht.

Gleichungen $x = y$, in denen x und y irgendwelche Terme sind, kann man in äquivalente Gleichungen umformen durch:

- Addition des gleichen Terms z zu beiden Seiten (da man z durch $-z$ ersetzen kann, ist hierin auch die Subtraktion von z an beiden Seiten enthalten).
- Multiplikation beider Seiten mit einem Term z, der niemals den Wert 0 annimmt, dessen Wert also für alle Werte der darin vorkommenden Variablen von 0 verschieden ist.
- Falls x und y beide niemals den Wert 0 annehmen, so kann man $x = y$ auch in die äquivalente Gleichung $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$ umformen.

Die Aussage „Die Gleichungen $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ sind äquivalent“ heißt dabei:

x_1, y_1, x_2, y_2 sind Terme, in denen die Variablen $u_1, \ldots, u_n$ vorkommen, deren Werte in einer vorgegebenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ frei wählbar sind, und die Gleichung $x_1 = y_1$ ist für $(u_1, \ldots, u_n) \in D$ genau dann richtig, wenn auch $x_2 = y_2$ für diesen Wert $(u_1, \ldots, u_n)$ richtig ist.

Anders gesagt: Beide Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge.

Dagegen sind keine Äquivalenzumformugen:

- Multiplikation mit (oder Division durch) einen Term bzw. Terme, die den Wert 0 annehmen können. Bei diesen muss man zusätzliche Fallunterscheidungen einführen, damit man zu gültigen Ergebnissen kommt.
- Ebenfalls nicht erlaubt ist Potenzieren beider Seiten.
- Wurzelziehen aus beiden Seiten ist nur erlaubt, wenn beide Seiten positiv sind und auf beiden Seiten die positive Wurzel gezogen wird. Bei höheren Wurzeln ($\sqrt[3]{x}$ etc.) ist die gleiche Einschränkung bei aller geraden Wurzelexponenten zu beachten.

Ungleichungen $x < y$, in denen x, y Terme wie oben sind, können in äquivalente Ungleichungen umgeformt werden durch

- Addition des gleichen Terms zu beiden Seiten (bzw. Subtraktion).
- Multiplikation beider Seiten mit einem Term, der stets echt positiv ist.
- Multiplikation beider Seiten mit einem Term, der stets < 0 ist bei gleichzeitiger Umkehrung des $<$-Symbols.

Auch für Ungleichungen sind die Verbotslisten von Gleichungen gültig, dazu kommen die oben angegebenen Vorzeichenbeschränkungen.

Man beachte im Übrigen stets

- Gleichungen sind transitiv:

$$\text{Ist} \quad a = b \quad \text{und} \quad b = c, \quad \text{so ist} \quad a = c.$$

- Ungleichungen mit den gleichen Zeichen sind transitiv:

$$\text{Ist} \quad a < b \quad \text{und} \quad b < c, \quad \text{so ist} \quad a < c.$$

  Dagegen: Ist $a < b$ und $c < b$, so lässt sich nichts darüber sagen, ob $a < c$, $a = c$ oder $a > c$ gilt.

- Nicht transitiv sind außerdem Ungleichheiten:

$$\text{Ist} \quad a \neq b \quad \text{und} \quad b \neq c, \quad \text{so kann dennoch} \quad a = c \quad \text{sein.}$$

Wichtige Regeln:

- $a < b, \quad c < d \qquad \Rightarrow \qquad a + c < b + d,$
- $0 < a < b, \quad c < d, \quad d > 0 \qquad \Rightarrow \qquad ac < bd,$
- $0 < a < b \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}.$

§1.6 Die komplexe Zahlen

Wir betrachten Zahlenmengen, in welchen zwei Operationen, die Addition und die Multiplikation, eingeführt sind, und untersuchen Gleichungen auf ihre Lösbarkeit.

1. Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Es gilt:

$$a, b \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Die Gleichung $x + 7 = 3$ ist in $\mathbb{N}$ **nicht lösbar.**

$\boxed{2.}$ Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Es gilt:

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{Z}, \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad a - b \in \mathbb{Z}.$$

Die Gleichung $3x = 7$ ist in $\mathbb{Z}$ **nicht lösbar**.

$\boxed{3.}$ **Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher oder unendlicher periodischer Dezimalbruch darstellen.

Es gilt:

$$a, b \in \mathbb{Q}, \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \pm b \in \mathbb{Q}, \quad a \cdot b \in \mathbb{Q}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Die Gleichung $x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ **nicht lösbar**.

4. Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}_{irr},$$

wobei $\mathbb{R}_{irr}$ die Menge aller irrationalen Zahlen (aller nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche) bezeichnet.

Es gilt:

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \pm b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ **nicht lösbar.**